



X OLIMPIADA CENTROAMERICANA Y DEL CARIBE DE FÍSICA

PRUEBA TEÓRICA

T2-1
SOLUCIONES

Solución problema 2.

a) Velocidad Angular de Co-rotación

Para que el satélite mantenga una posición fija relativa a la línea Sol-Tierra, debe orbitar el Sol con el mismo período orbital, T , que la Tierra. La velocidad angular, ω , está relacionada con el período por la ecuación del movimiento circular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sustituyendo el valor del período orbital de la Tierra:

$$\omega = \frac{2\pi}{3.15 \times 10^7 \text{ s}} \approx 1.99 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$$

Esta es la velocidad angular requerida para el satélite.

b) Diagrama de Cuerpo Libre y Ecuación de Movimiento

El satélite de masa m está sujeto a dos fuerzas gravitacionales:

1. La fuerza de atracción del Sol, F_S , dirigida hacia el Sol.
2. La fuerza de atracción de la Tierra, F_T , dirigida hacia la Tierra.

El satélite se encuentra a una distancia r de la Tierra y, por lo tanto, a una distancia $(R - r)$ del Sol. La fuerza neta sobre el satélite proporciona la fuerza centrípeta necesaria para su órbita circular con velocidad angular ω . El radio de esta órbita es $(R - r)$. La Segunda Ley de Newton para el movimiento circular es $F_{\text{net}} = ma_c$, donde $a_c = \omega^2(R - r)$.

$$F_S - F_T = m\omega^2(R - r)$$

Las fuerzas gravitatorias son:



T2-2
SOLUCIONES

$$F_S = \frac{GM_S m}{(R - r)^2}$$

$$F_T = \frac{GM_T m}{r^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de Newton:

$$\frac{GM_S m}{(R - r)^2} - \frac{GM_T m}{r^2} = m\omega^2(R - r)$$

Simplificando la masa del satélite m :

$$\frac{GM_S}{(R - r)^2} - \frac{GM_T}{r^2} = \omega^2(R - r)$$

c) Aproximación y Cálculo de la Posición L_1

Para el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, la fuerza gravitatoria del Sol proporciona la fuerza centrípeta:

$$\frac{GM_S M_T}{R^2} = M_T \omega^2 R$$

De donde se obtiene que:

$$\omega^2 = \frac{GM_S}{R^3}$$

Sustituimos esta expresión de ω^2 en la ecuación del satélite del inciso (b):

$$\frac{GM_S}{(R - r)^2} - \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_S}{R^3}(R - r)$$

Dividiendo todo por G :

$$\frac{M_S}{R^2(1 - r/R)^2} - \frac{M_T}{r^2} = \frac{M_S}{R^2}(1 - r/R)$$

Dado que la distancia r al punto L_1 es mucho menor que la distancia Sol-Tierra R ($r \ll R$), podemos usar la aproximación binomial $(1 - x)^{-2} \approx 1 + 2x$ para $x = r/R$. El término $(1 - r/R)^{-2}$ se convierte en $(1 + 2r/R)$.



$$\frac{M_S}{R^2} \left(1 + \frac{2r}{R}\right) - \frac{M_T}{r^2} \approx \frac{M_S}{R^2} \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Distribuyendo el término M_S/R^2 :

$$\frac{M_S}{R^2} + \frac{2rM_S}{R^3} - \frac{M_T}{r^2} \approx \frac{M_S}{R^2} - \frac{rM_S}{R^3}$$

Cancelando el término M_S/R^2 :

$$\frac{2rM_S}{R^3} - \frac{M_T}{r^2} \approx -\frac{rM_S}{R^3}$$

Reorganizando para aislar el término con M_T :

$$\frac{M_T}{r^2} \approx \frac{2rM_S}{R^3} + \frac{rM_S}{R^3} = \frac{3rM_S}{R^3}$$

Esta es una aproximación común, pero la que se pide en el problema es ligeramente diferente. Volvamos a la ecuación antes de la aproximación y reorganicemos de otra forma:

$$\frac{GM_S}{(R-r)^2} - \frac{GM_S(R-r)}{R^3} = \frac{GM_T}{r^2}$$

Factor común GM_S :

$$\frac{M_S}{R^2} \left[\frac{1}{(1-r/R)^2} - (1-r/R) \right] = \frac{M_T}{r^2}$$

Usando la aproximación $(1-r/R)^{-2} \approx 1 + 2r/R$:

$$\frac{M_S}{R^2} \left[\left(1 + \frac{2r}{R}\right) - \left(1 - \frac{r}{R}\right) \right] \approx \frac{M_T}{r^2}$$

$$\frac{M_S}{R^2} \left[1 + \frac{2r}{R} - 1 + \frac{r}{R} \right] \approx \frac{M_T}{r^2}$$

$$\frac{M_S}{R^2} \left(\frac{3r}{R} \right) \approx \frac{M_T}{r^2}$$

Usando la expresión dada en el problema:

T2-3
SOLUCIONES



$$\frac{M_T}{r^2} \approx \frac{M_S}{R^2} \left(\frac{2r}{R} \right)$$

Despejamos r^3 :

$$r^3 \approx \frac{M_T R^3}{2M_S}$$

$$r \approx \left(\frac{M_T R^3}{2M_S} \right)^{1/3}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$r \approx \left(\frac{(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})(1.50 \times 10^{11} \text{ m})^3}{2(1.99 \times 10^{30} \text{ kg})} \right)^{1/3}$$

$$r \approx \left(\frac{5.97 \times 3.375}{3.98} \times 10^{24+33-30} \right)^{1/3} \text{ m}$$

$$r \approx (5.06 \times 10^{27})^{1/3} \text{ m} \approx 1.72 \times 10^9 \text{ m}$$

Cálculo usando la derivación más precisa ($3r/R$):

$$r \approx \left(\frac{M_T R^3}{3M_S} \right)^{1/3} \approx 1.50 \times 10^9 \text{ m}$$

(Se acepta cualquiera de las dos respuestas si el procedimiento es correcto, aunque se priorizará el resultado obtenido a partir de la fórmula explícitamente dada en el inciso).

Finalmente, calculamos la distancia como un porcentaje de R :

$$\%_R = \frac{r}{R} \times 100\% = \frac{1.50 \times 10^9 \text{ m}}{1.50 \times 10^{11} \text{ m}} \times 100\% = 1.0\%$$

La distancia al punto L_1 desde la Tierra es aproximadamente el 1% de la distancia total Sol-Tierra.

d) Tenemos que analizando las fuerzas:

$$\frac{GM_S m}{(R+r)^2} + \frac{GM_T m}{r^2} = m\omega^2(R+r)$$

T2-4
SOLUCIONES



Resolviendo para r (haciendo el mismo procedimiento que en los pasos b y c), obtenemos igualmente que : $r \approx \left(\frac{M_T R^3}{3M_S} \right)^{1/3}$, y concluimos que $r_2 \approx r_1$.

T2-5
SOLUCIONES

e) Los puntos de lagrange L_1 y L_2 son ambos inestables, esto se debe a que se encuentran en puntos sillas del potencial, por lo que si se hace una perturbación en la dirección formada por el segmento Sol-Tierra, los objetos se alejan del punto de equilibrio.

f) Tenemos que :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m\omega^2(R-r_1)}{m\omega^2(R+r_2)}, \text{ por lo que se concluye que } F_1 < F_2.$$

g) Buscando las energías, que sería simplemente la sumatoria de las contribuciones de energía potencial gravitacional y de energía cinética.

$$E_1 = -\frac{GM_S m}{R-r_1} - \frac{GM_T m}{r_1} + \frac{1}{2}m\omega^2(R-r_1)^2$$

$$E_2 = -\frac{GM_S m}{R+r_2} - \frac{GM_T m}{r_2} + \frac{1}{2}m\omega^2(R+r_2)^2$$

Calculando tenemos que :

$$E_1 \approx -4.57 \times 10^{11} J, E_2 \approx -4.22 \times 10^{11} J, \Delta E_{1,2} \approx 3.55 \times 10^{10} J$$