



X OLIMPIADA CENTROAMERICANA Y DEL CARIBE DE FÍSICA

PRUEBA TEÓRICA

T1-1
SOLUCIONES

Solución problema 1: Cálculo de la curva envolvente

a) Primero buscaremos la expresión para $y = f(x, v_0, g, h, \tan \theta)$ para las trayectorias dentro de la región, dado que:

$$x = v_0 \cos(\theta)t$$

$$y = h + v_0 \sin(\theta)t - \frac{g}{2}t^2$$

Eliminando a "t" de la ecuación para y, obtenemos que :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)}$$

Así entonces sustituyendo en la expresión para "y" y simplificando:

$$y = h + v_0 \sin(\theta) \left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta)} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta)} \right)^2$$

Obtenemos que :

$$y = h + x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2(\theta))$$

b) Recordando que obtuvimos la ecuación :

$$y = h + x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2(\theta))$$

que describe cualquier punto de las trayectorias en el domo, notamos que esta es simplemente una ecuación cuadrática en $\tan(\theta)$, resolviendo la ecuación obtenemos la expresión general :



X OLIMPIADA
CENTROAMERICANA Y DEL CARIBE
DE FÍSICA (OCCAFI) 20
REPÚBLICA DOMINICANA **25**



$$\tan(\theta) = \frac{v_0^2}{gx} \mp \frac{v_0^2}{gx^2} \sqrt{x^2 + 2gx(h - y - \frac{gx^2}{2v_0^2})}$$

T1-2
SOLUCIONES

Para obtener el ángulo óptimo (es decir el ángulo tal que el punto (x, y) sea un punto de la curva envolvente) analizamos la expresión $y = f(x, v_0, g, h, \tan \theta)$ y observamos que para cada punto "x" tenemos distintos valores de "y" dentro de la región dependiendo de la tangente ángulo θ . La curva envolvente estará compuesta por los puntos (x, y(x)) siendo los y(x) los valores máximos de $y(x, \tan(\theta))$. Maximizando con respecto a $\tan(\theta)$:

$$y = h + x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2(\theta))$$

Llamaremos $u = \tan(\theta)$. Así tenemos entonces una ecuación cuadrática $y = f(u)$ de la forma :

$$y = au^2 + bu + c$$

donde

$$a = -\frac{gx^2}{2v_0^2}, b = x, c = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Ahora, analizando cualitativamente la parábola, notamos que como $a < 0$, la parábola abre hacia abajo, por lo que el máximo de la parábola ocurre en el vértice, es decir, $u = -\frac{b}{2a}$ (expresión para el vértice de una parábola), tenemos que como en este caso $u = \tan \theta$, obtenemos:

$$\tan(\theta) = \frac{v_0^2}{gx}$$

c) Sustituyendo la tangente del ángulo óptimo encontrada en

$$y = h + x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2(\theta))$$

Obtenemos que :

$$y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

d) Buscando las raíces x_1, x_2 de $y(x)$, sabiendo que $\Delta x_{max} = x_2 - x_1$:

T1-3
SOLUCIONES



$$y = h + \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0$$

$$x_1 = -\frac{v_0^2}{g} \sqrt{\frac{2g}{v_0^2} \left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right)}, \quad x_2 = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{\frac{2g}{v_0^2} \left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right)}$$

Por lo que $\Delta x_{max} =$

$$\Delta x_{max} = 2 \frac{v_0^2}{g} \sqrt{\frac{2g}{v_0^2} \left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right)}$$

A la vez $\Delta y_{max} = h + \frac{v_0^2}{2g}$, por lo que buscando la razón y simplificando obtenemos :

$$\frac{\Delta X_{máx}}{\Delta Y_{máx}} = 2 \sqrt{\frac{\frac{2v_0^2}{g}}{h + \frac{v_0^2}{2g}}}$$

e) Podemos ver que $\frac{\Delta X_{max}}{\Delta Y_{max}}$ para h grande , es decir, $h \gg \frac{v^2}{2g}$ se comporta de la forma :

$$\frac{\Delta X_{máx}}{\Delta Y_{máx}} \approx \frac{c}{\sqrt{h}}$$

donde c es una constante independiente de h. Podemos ver que a medida que la altura aumenta, la razón entre el desplazamiento máximo horizontal y vertical decrece de una manera proporcional a $h^{-1/2}$, por lo que $n = -\frac{1}{2}$.