



X OLIMPIADA
CENTROAMERICANA Y DEL CARIBE
DE FÍSICA (OCCAFI) 20
REPÚBLICA DOMINICANA **25**

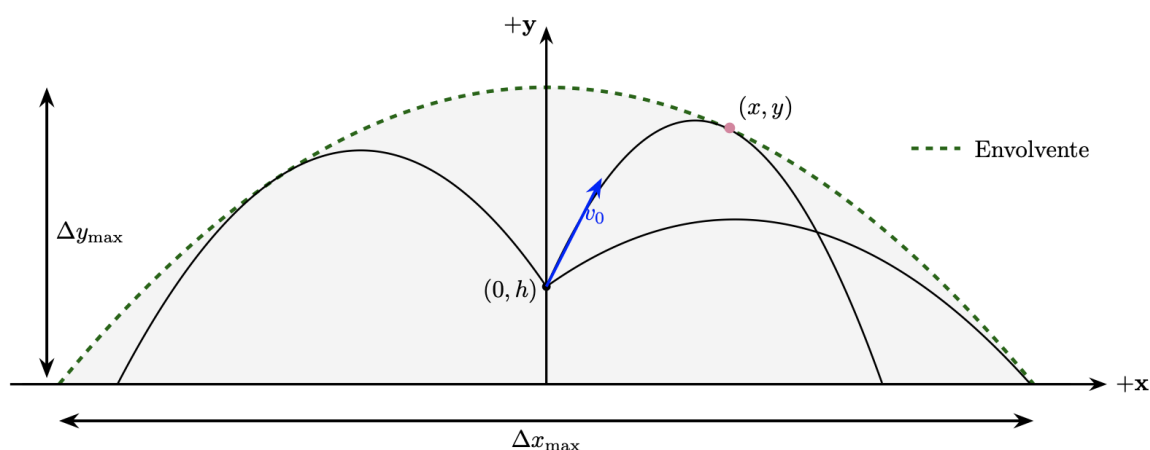


X OLIMPIADA CENTROAMERICANA Y DEL CARIBE DE FÍSICA

Problema 1: Cálculo de la curva envolvente.

En un simulador de tiro al blanco en Santo Domingo, se busca diseñar un domo protector que cubra todos los posibles trayectos de proyectiles lanzados desde una altura sobre el suelo. Para la prueba, se disparan proyectiles de igual masa en todas las direcciones, y cada lanzamiento se realiza con la misma rapidez v_0 .

El objetivo es describir todas las trayectorias de los proyectiles que quedan cubiertas por la envolvente.





- a) **(1.0 punto)** Deduzca la ecuación que describe la familia de trayectorias dentro del domo, específicamente $y = f(x, v_0, g, h, \tan \theta)$.
- b) **(3.0 puntos)** Dado un punto en el domo (x, y) resuelva para $\tan \theta$ en función de (v_0, g, x, y) y demuestre que para el ángulo óptimo :

$$\tan \theta_0 = \frac{v_0^2}{gx}$$

- c) **(3.0 puntos)** Considere el plano vertical que pasa por el eje de simetría del domo y que contiene al punto de lanzamiento. En este plano, los proyectiles delimitan una curva envolvente (ver figura). Obtenga la ecuación $y(x)$ que describe la curva límite que es tangente a las trayectorias parabólicas dentro del domo, específicamente $y = f(x, v_0, g, h)$.

- d) **(2.0 puntos)** El cociente

$$\frac{\Delta X_{\text{máx}}}{\Delta Y_{\text{máx}}}$$

(ver figura) cuantifica la proporción geométrica de la sección transversal del domo, indicando la relación entre la extensión horizontal máxima y la altura máxima. Obtenga esta relación en función de v_0, g, h .

- e) **(1.0 punto)** Para $h \gg \frac{v_0^2}{2g}$, El cociente descrito en el punto d. se puede aproximar como una función que varía de la forma h^n . Encuentre el valor n .



Problema 2: Estabilidad Orbital de un Satélite de Comunicaciones en un Punto de Lagrange.

El satélite de observación solar SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) es un proyecto conjunto de la ESA y la NASA para estudiar el Sol. Para tener una vista ininterrumpida de nuestra estrella, el satélite no orbita la Tierra, sino que se encuentra en una órbita especial alrededor del Sol, manteniéndose en la línea que une al Sol y la Tierra. Específicamente, se ubica en el punto de Lagrange L1. En este punto, la atracción gravitatoria combinada del Sol y la Tierra proporciona la fuerza centrípeta exacta necesaria para que el satélite orbite el Sol con el mismo período que la Tierra. Un equipo de ingenieros y científicos debe verificar los parámetros orbitales para asegurar la viabilidad de una misión similar.

Datos:

- Masa del Sol, $M_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
- Masa de la Tierra, $M_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
- Distancia media Sol-Tierra (centro a centro), $R = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$
- Constante de Gravitación Universal, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
- Período orbital de la Tierra alrededor del Sol, $T = 3.15 \times 10^7 \text{ s}$ (1 año)

Suposiciones:

- Considere que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es perfectamente circular.
- El satélite se encuentra sobre la línea recta que une los centros del Sol y la Tierra.
- La masa del satélite, m , es despreciable en comparación con M_S y M_T .



Un equipo de ingeniería de misión debe calcular la ubicación precisa del punto L1 y la velocidad del satélite para asegurar su estabilidad. Para ello, deben resolver las siguientes cuestiones técnicas:

- (1.0 punto)** El satélite debe orbitar el Sol con el mismo período que la Tierra para mantener su posición relativa. Desde el punto de vista de un observador inercial, ¿cuál es la rapidez angular, ω , con la que el satélite debe girar alrededor del centro de masas (CM) del sistema Sol-Tierra? Para esta parte, puede aproximar la posición del CM del sistema a la posición del centro del Sol.
- (2.0 puntos)** Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el satélite de masa m ubicado a una distancia r de la Tierra (hacia el Sol) sobre la línea Sol-Tierra. Escriba la ecuación de la segunda Ley de Newton para el movimiento circular del satélite alrededor del Sol.
- (3.0 puntos)** A partir de la ecuación planteada en el inciso (b), demuestre que la distancia r desde el centro de la Tierra hasta el punto L1 satisface aproximadamente la siguiente ecuación:

$$\frac{M_T}{r^2} \approx \frac{M_S}{R^2} \left(\frac{3r}{R} \right)$$

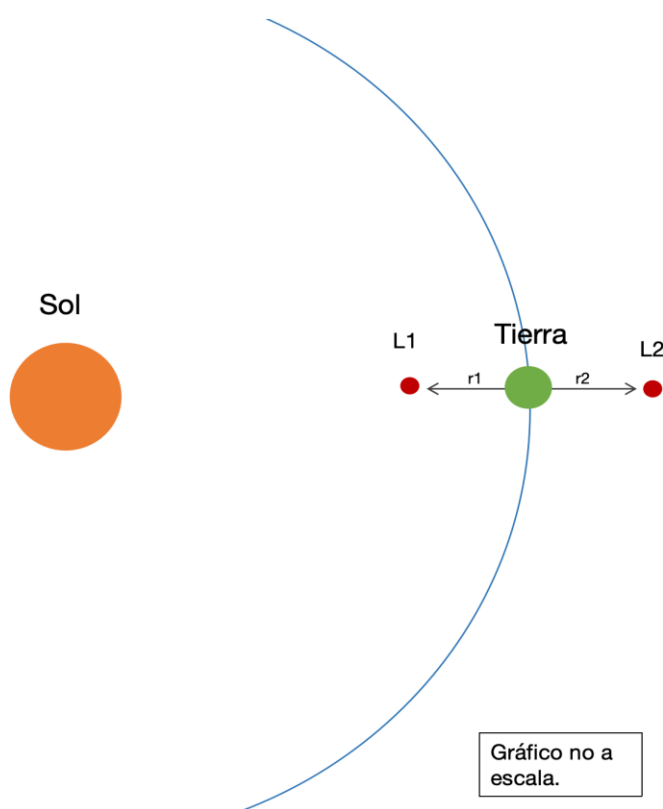
Sugerencia: Utilice la aproximación binomial $(1 - x)^n \approx 1 - nx$ para $x \ll 1$.

A partir de esta relación simplificada, calcule:

- El valor numérico de la distancia r_1 en metros.
 - El porcentaje de r en relación a la distancia total Sol-Tierra, R .
- (2.0 puntos)** Existe otro punto de Lagrange L_2 sobre la línea Sol-Tierra a una distancia r_2 de la Tierra, pero en la dirección opuesta al Sol (Ver figura). Encuentra una expresión aproximada para r_2 y compárela con r_1 .



X OLIMPIADA
CENTROAMERICANA Y DEL CARIBE
DE FÍSICA (OCCAFI) 20
REPÚBLICA DOMINICANA **25**



- e) **(1.0 punto)** Explique cualitativamente si las posiciones L_1 y L_2 , son estables o inestables.
- f) **(1.0 punto)** Compare (mayor, menor o igual) y discuta las fuerzas netas en las posiciones L_1 y L_2 .
- g) **(2.0 puntos)** Si la masa del satélite es de 1000 kg, indique la diferencia de energía mecánica cuando el satélite está en L_1 en comparación con L_2 .



Problema 3: Diagnóstico y Calibración de un Acelerómetro Mecánico

Una compañía ha lanzado al mercado un acelerómetro mecánico para vehículos. El dispositivo consiste en un bloque de masa $m = 10.0 \text{ g}$ que desliza en una varilla horizontal, conectado a un resorte de constante $k = 20.0 \text{ N/m}$. En reposo sobre una superficie horizontal, el bloque está en el centro de un contenedor de $L = 50.0 \text{ cm}$. La calibración de fábrica asume un comportamiento ideal sin fricción, usando la relación $a = (k/m)x$ para convertir el desplazamiento x en una lectura de aceleración a .

Tras su lanzamiento, la compañía recibe quejas y reportes técnicos que usted, como físico del equipo de desarrollo, debe analizar:

- a) **(2.0 puntos)** Queja por “Aceleración Fantasma”: Un cliente reporta que el dispositivo muestra una lectura de aceleración constante y no nula cuando su vehículo está estacionado (en reposo) en su rampa de garaje, la cual tiene una inclinación de $\theta = 15.0^\circ$ respecto a la horizontal. Determine la expresión y calcule el valor de la “aceleración fantasma” que reporta el dispositivo. Explique físicamente por qué ocurre esta lectura.
- b) **(4.0 puntos)** Reporte de Inexactitud (Fricción): Una agencia de pruebas independiente reporta que el acelerómetro no es fiable. Sus análisis indican la presencia de un coeficiente de fricción estática $\mu_s = 0.150$ y cinética $\mu_k = 0.100$ entre el bloque y la varilla.
 - i) Calcule la “zona muerta” del acelerómetro, es decir, la aceleración mínima (a_{min}) que el vehículo debe tener para que el bloque apenas comience a moverse desde su posición central.
 - ii) Si el vehículo mantiene una aceleración constante real de $a_{real} = 5.00 \text{ m/s}^2$, ¿cuál es el desplazamiento x del bloque y qué valor de aceleración $a_{leída}$ mostraría incorrectamente el dispositivo si sigue usando la calibración ideal de fábrica?



- c) **(2.0 puntos)** Reporte de Lecturas Anómalas en Frenado: Un piloto de pruebas informa que, tras un frenado muy brusco, la lectura del acelerómetro se vuelve “loca” por unos instantes, oscilando rápidamente antes de estabilizarse. Suponiendo un comportamiento ideal sin fricción para simplificar este análisis, determine la expresión y calcule el valor de la frecuencia f de estas oscilaciones. Explique la causa física de este fenómeno.