Ecografía Doppler

Una ecografía es un procedimiento médico no invasivo, para ello utiliza las ondas sonoras las cuales se reflejan en los órganos y objetos internos del cuerpo y regresan al ecógrafo donde los datos son procesados.

Se conoce que la frecuencia del sonido en un fluido como la sangre depende de la densidad del fluido ρ, del módulo de volumen (o compresibilidad volumétrica) B (donde P es presión y V es volumen) y la longitud de onda λ:

$$B = -\frac{P}{\Delta V/V} \qquad\qquad f = \sqrt{\frac{B}{\rho\lambda^2}}$$

a. Determine una expresión para la velocidad del sonido v_s dentro del cuerpo humano.[0.25 pt]

La sangre tiene una densidad de $\rho_S = 1{,}06$ g/ml y un módulo de volumen $B = 2{,}13444$ GPa. Mientras que el tejido biológico se aproxima que $\rho = 0,9$ g/ml y $Y = 1{,}9835$ GPa. Siendo Y el módulo de Young (donde F es la fuerza aplicada sobre el área transversal y L la longitud del material de área transversal A):

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

b. Se coloca un ecógrafo en el vientre de una paciente en el octavo mes de embarazo, el aparato envía un pulso sonoro con una frecuencia de 15MHz. Considere: $n = 824{,}82 = \dfrac{T}{t_{Total}}$ siendo el t_{Total} el tiempo total el necesario para que el sonido regrese al ecógrafo y T el periodo de la frecuencia anterior. ¿Cuál es la distancia del ecógrafo al bebe sabiendo que la capa de piel posee 2cm de espesor? [2.00 pt]

Para determinar la velocidad de la sangre en el torrente sanguíneo se utiliza el principio de refracción y reflexión de una onda sonora al chocar con los glóbulos en la sangre, en este caso el fenómeno también denominado como “eco”, cumple que la reflexión de la onda es total al llegar al glóbulo (esta aproximación es para fines académicos)

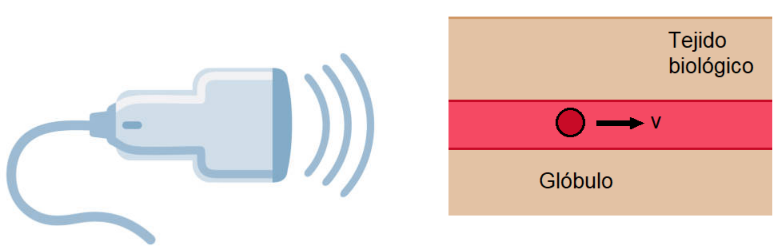


Figura 1

c. Determine la frecuencia que percibirá un glóbulo al moverse a una velocidad v (v es mucho menor a la velocidad del sonido) a lo largo del eje en el que se encuentra el ecógrafo. La frecuencia inicial es f_0 (figura 1) [2.50 pt]

d. Determine una aproximación de la frecuencia que percibirá el ecógrafo luego de que la onda sonora rebote en el glóbulo. Considere: $(1+x)^n \approx 1+nx$ cuando $x \ll 1$. [2.00pt]

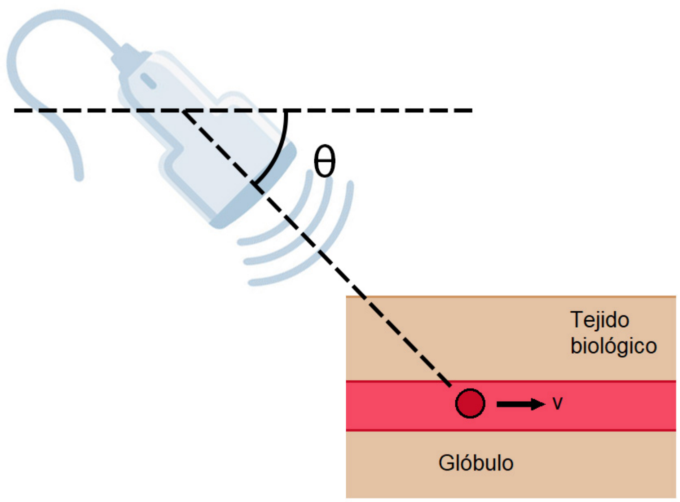


Figura 2

e. Encuentre la corrección que se debe hacer al literal anterior para el caso real en el que el aparato no está paralelo al flujo sanguíneo sino que está inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal (ver figura 2). [3.00 pt]

f. Encuentre la velocidad de la sangre en función del cambio de frecuencia Δf y los datos anteriores [0.25 pt]

Solución

a)

$$v = f\lambda = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}}$$

---

b)

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{P}{\Delta L/L} * \frac{1}{A/A} = \frac{P}{\Delta V/V} = B$$

$$v_{Piel} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,9835 \times 10^9\ [Pa]}{900\ [kg/m^3]}} = 1484{,}55\ m/s$$

$$v_{Sangre} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,13444 \times 10^9\ [Pa]}{1060\ [kg/m^3]}} = 1419{,}02\ m/s$$

$$x = (v_{Piel}t_1 + v_{Sangre}t_2)$$

$$\frac{T}{t_{Total}} = n$$

$$\frac{n}{f_0} = 2(t_1 + t_2) \rightarrow t_2 = \frac{n}{2f_0} - t_1$$

$$t_1 = \frac{2[cm]}{v_{Piel}} = \frac{0{,}02[m]}{1484,55[m/s]} = 1{,}34 \times 10^{-5}s$$

$$t_2 = \frac{n}{2f_0} - t_1 = 1{,}4094 \times 10^{-5}s$$

$$x = 2[cm] + v_{Sangre}t_2 = 3{,}999cm \approx 4cm$$

$$\boxed{x \approx 4cm}$$

---

c)

$$f = f_0\left(\frac{v_s + v_r}{v_s - v_e}\right)$$

$$f_1 = f_0\left(\frac{v_s + v}{v_s - 0}\right) = f_0\left(1 + \frac{v}{v_s}\right)$$

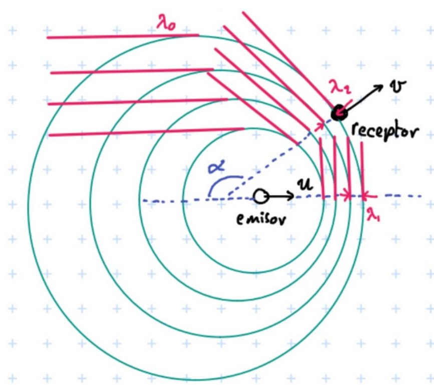
d)

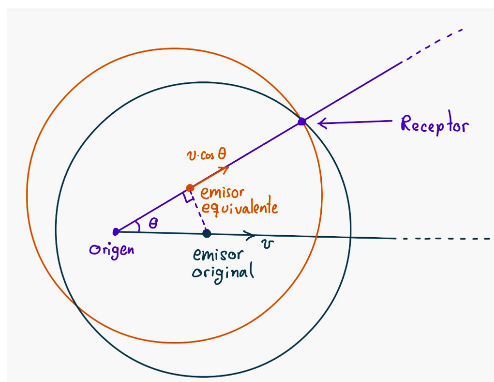
$$f = f_0 \left(\frac{v_s + v_r}{v_s - v_e} \right)$$

$$f_2 = f_1 \left(\frac{v_s + 0}{v_s - v} \right) = f_0 \left(1 + \frac{v}{v_s} \right) * \left(1 - \frac{v}{v_s} \right)^{-1} \approx f_0 \left(1 + \frac{v}{v_s} \right)^2 \approx f_0 \left(1 + \frac{2v}{v_s} \right)$$

$$\boxed{f_2 \approx f_0 \left(1 + \frac{2v}{v_s} \right)}$$

e)





Este literal corresponde al caso de efecto Doppler con velocidades oblicuas donde solo la componente radial contribuye al efecto Doppler de las ondas sonoras.

$$v_{Radial} = v \cos\theta \rightarrow f_2 = f_0 \left(1 + \frac{2v\cos\theta}{v_s} \right)$$

$$\boxed{f_2 = f_0 \left(1 + \frac{2v\cos\theta}{v_s} \right)}$$

f)

$$f_2 = f_0 \left(1 + \frac{2v\cos\theta}{v_s} \right) \rightarrow \Delta f = \frac{2v f_0 \cos\theta}{v_s} \rightarrow v = \frac{v_s}{2\cos\theta} \frac{\Delta f}{f_0}$$

$$\boxed{v = \frac{v_s}{2\cos\theta} \frac{\Delta f}{f_0}}$$