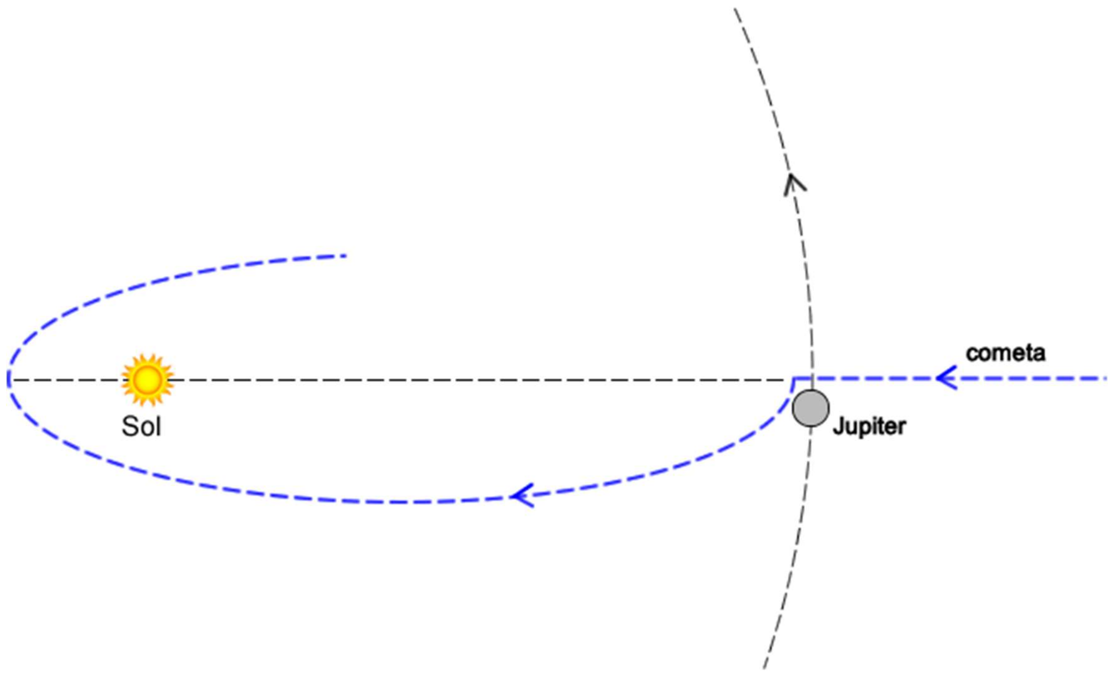
MUY SIMPLE PARA UN JOVIANO

Los cometas son cuerpos celestes que básicamente es hielo con rocas y polvo. Estos cuerpos orbitan alrededor del Sol en trayectorias elípticas. Se pueden distinguir 2 tipos de cometas: las de largo periodo y las de periodo corto. Dentro de estos últimos existe un grupo de cometas denominados Jovianos también llamados **Familia de Júpiter** o **JFC** (del inglés *Jupiter Family Comets*).

Se llaman así porque se encuentran girando entre Júpiter y el Sol. La gravedad de esos dos objetos gigantes perturban la trayectoria original de un cometa entrante, y la convierten en una elipse tan estrecha, que hace que orbiten al Sol en períodos relativamente cortos.

En esta ocasión intentaremos explicar, mediante un modelo simple, cómo un cometa que ingresa a nuestro sistema puede convertirse en un cometa Joviano.

Imaginemos a un cometa que es atraído desde una gran distancia, hacia nuestro sistema, por acción exclusiva del Sol y que al pasar por la órbita de Júpiter interactúa brevemente con este que lo desvía de su trayectoria original para finalmente quedar atrapado en una trayectoria elíptica.



Para comprender mejor toda esta travesía la analizaremos en 3 etapas que describiremos a continuación. En cada una de estas, se le pedirá realizar algunas tareas para las cuales deberá tomar en cuenta que G es la constante de gravitación universal, m_c es la masa del cometa, m_J es la masa de Júpiter, m_S es la masa del Sol y r es la distancia media de Júpiter al Sol.

1° UNA INVITACIÓN IMPOSIBLE DE RECHAZAR

Supongamos que un cometa ubicado a una gran distancia del Sol, es invitado por este a formar parte de nuestro sistema. El cometa parte del reposo y acelera por acción exclusiva del Sol.

A) Determine la rapidez v_c del cometa al llegar a las inmediaciones de la órbita de Júpiter. Es decir, a una distancia aproximada r del Sol.

Para determinar la rapidez del cometa en el momento que empieza a interactuar con Júpiter aplicaremos la conservación de energía entre el sistema cometa - Sol desde el momento en que el cometa partió del reposo, desde una distancia muy alejada, hasta que llega a estar a una distancia del Sol igual a r,

$$E_{inicio} = E_{final}$$

$$0 = -G\frac{m_c \cdot m_S}{r} + \frac{1}{2}m_c {v_c}^2$$

$$v_c = \sqrt{2\frac{G \cdot m_S}{r}}$$

B) Determine la rapidez orbital de Júpiter v_J , compárela con la rapidez del cometa v_c obtenida en el ítem anterior y reescriba esta última en términos de v_J

Para determinar la rapidez orbital de Júpiter alrededor del Sol usaremos la segunda ley de Newton aplicada al movimiento circunferencial. En este caso, la fuerza centrípeta es la fuerza gravitacional entre el Sol y Júpiter. Siendo v_J la rapidez buscada, m_J la masa de Júpiter, m_S la masa del Sol y r, el radio medio orbital de Júpiter, tenemos:

$$m_J \frac{{v_J}^2}{r} = G\frac{m_J \cdot m_S}{r^2}$$

$$v_J = \sqrt{\frac{G \cdot m_S}{r}} \qquad \ldots \; (\alpha)$$

Comparándola con la obtenida en el ítem anterior

$$v_c = \sqrt{2}\, v_J \ldots \quad (\beta)$$

2° UNA ATRACCIÓN INTENSA Y BREVE

La interacción del cometa con Júpiter se hace apreciable justo en el momento que el cometa tiene la velocidad calculada en el ítem A). Es decir, cuando el cometa se encuentra a una distancia aproximada r del Sol y las velocidades del cometa y del planeta son prácticamente perpendiculares. A partir de este momento y durante un breve lapso de tiempo podemos despreciar el efecto de atracción del Sol sobre el cometa.

C) Supongamos que, durante la interacción entre el cometa y el planeta, la rapidez relativa del cometa con respecto a Júpiter permanece invariable. Determine la rapidez relativa del cometa respecto a Júpiter $v_{c/J}$ al finalizar su interacción con este. Dé su respuesta en términos de la rapidez orbital de Júpiter v_J.

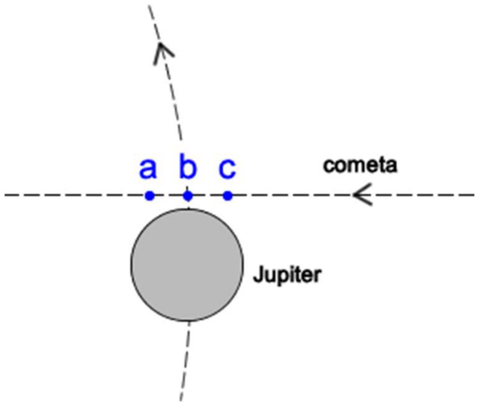
Como el cometa solo cambia la dirección de su velocidad relativa a júpiter, al finalizar la interacción, el cometa tendrá la rapidez misma rapidez relativa que al inicio de la interacción. Como al principio las velocidades eran prácticamente perpendiculares, tenemos

$$v_{c/J} = \sqrt{{v_J}^2 + {v_c}^2}$$

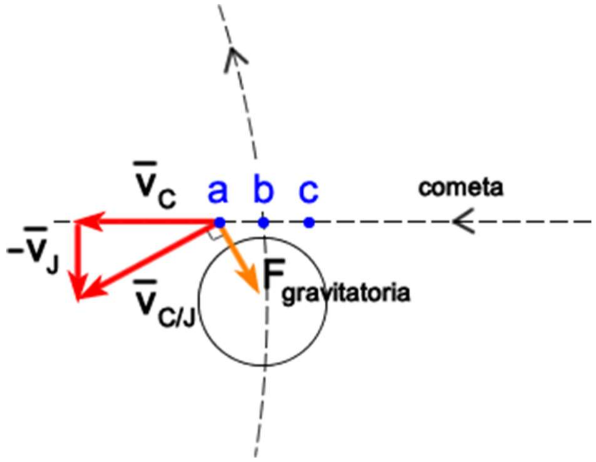
Como $v_c = \sqrt{2}\, v_J$, tenemos:

$v_{c/J} = \sqrt{3}\, v_J . . . (\gamma)$

D) En el siguiente gráfico hay 3 posibles ubicaciones (a, b y c) en las que puede encontrarse el cometa con relación a Júpiter, al momento de empezar a considerar su interacción con este, argumente cuál sería la ubicación más idónea de tal modo que la suposición planteada en el ítem C) sea posible.

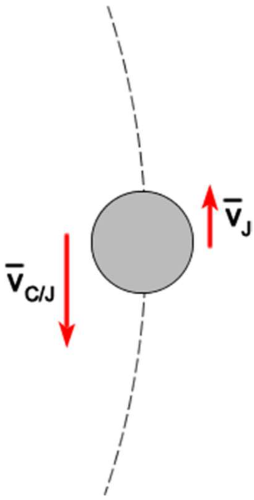


La ubicación del cometa al momento de considerar su interacción con Júpiter, debe ser tal que le permita a la fuerza gravitatoria modificar únicamente la dirección de su velocidad. Esto es posible, sólo sí la velocidad relativa del cometa respecto al planeta es perpendicular a la fuerza gravitatoria. Esto ocurre sólo si el cometa se ubica en el punto a.



E) Suponiendo que en el preciso momento en que la influencia de Júpiter deja de ser apreciable, el cometa se movía en dirección opuesta a este, determine la rapidez del cometa relativa al Sol $v_{c/S}$, considerado fijo durante el análisis de este modelo. Dé su respuesta en términos de la rapidez orbital de Júpiter v_J.

Como la masa del cometa es despreciable frente a la de Júpiter ($m_J \gg m_c$) la rapidez de este último prácticamente no se ha modificado por lo que la rapidez pedida será



$$\vec{v}_{c/S} = \vec{v}_{c/J} + \vec{v}_J$$

De la expresión *(γ)*, $v_{c/J} = \sqrt{3}\, v_J$ obtenida en el ítem C)

$$v_{c/S} = \left(\sqrt{3} - 1\right) v_J$$

3° ATRAPADO EN UN BAILE ETERNO

El breve trayecto del cometa por las inmediaciones de Júpiter es crucial para convertirse en un cuerpo que orbite alrededor del Sol. Inmediatamente después que Júpiter "suelte" al cometa, la influencia exclusiva del Sol, que se vuelve nuevamente apreciable, le permite al cometa orbitar alrededor de este, en una trayectoria elíptica, convirtiéndose así en un cometa Joviano.

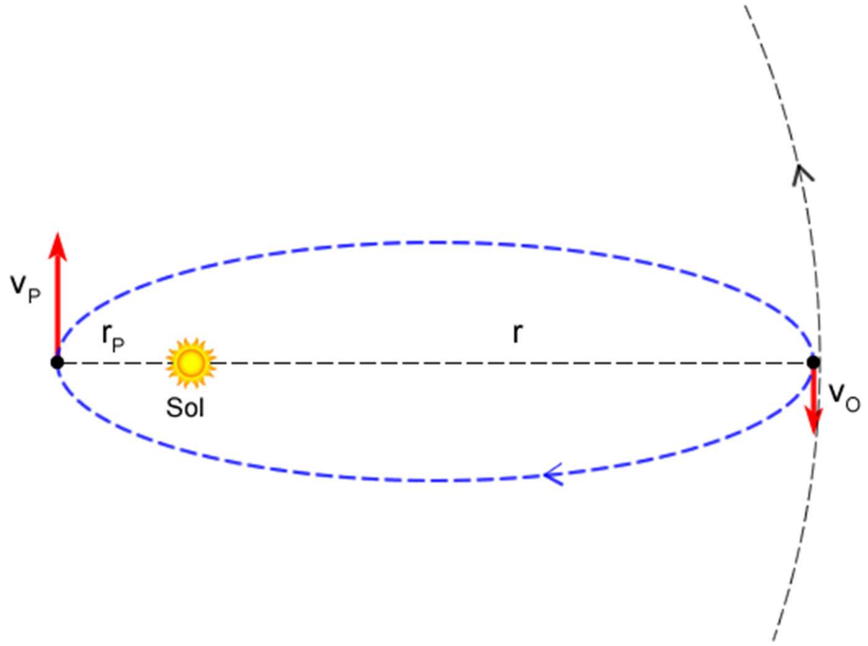
F) Si consideramos que el cometa pasó por el afelio de su órbita elíptica en el momento preciso en que queda bajo la influencia exclusiva del Sol, determine la mínima rapidez v_0 que experimenta el cometa durante su movimiento alrededor del Sol. Dé su respuesta en términos de la rapidez orbital de Júpiter v_J.

Como la influencia de Júpiter sobre el cometa cesa en el momento en que este pasa por su afelio, la expresión anterior, calculada en el item E), es la rapidez en el afelio y por lo tanto la rapidez mínima pedida.

$$v_0 = v_{c/S} = \left(\sqrt{3} - 1\right) v_J \quad \ldots \; (\delta)$$

G) Cuando el cometa pase por el punto de su trayecto más cercano al Sol tendrá una rapidez v_p y se encontrará a una distancia mínima r_p. Determine esta distancia mínima en términos del radio medio r de la órbita de Júpiter.

Es evidente que los parámetros v_p y r_p son la rapidez del cometa y distancia al Sol en el perihelio. Como el sistema es conservativo y de fuerza central, podemos aprovechar las leyes de conservación de la energía y el momento angular a fin de determinar la distancia más próxima al Sol a la que se acerca el cometa.



De la conservación de la energía mecánica

$$E_{afeli} = E_{periheli}$$

$$-G\frac{m_c \cdot m_S}{r} + \frac{1}{2}m_c{v_0}^2 = -G\frac{m_c \cdot m_S}{r_p} + \frac{1}{2}m_c{v_p}^2 \qquad ...(\varepsilon)$$

De la conservación del momento angular

$$\vec{L}_{afelio} = \vec{L}_{perihelio}$$

Igualando sus módulos

$$m_c v_0 r = m_c v_p r_p$$

$$v_p = v_0\frac{r}{r_p} \qquad ...(\varphi)$$

(φ) en (ε) :

$$-G\frac{m_S}{r} + \frac{1}{2}{v_0}^2 = -G\frac{m_S}{r_p} + \frac{1}{2}(v_0\frac{r}{r_p})^2$$

$$G\frac{m_S}{r_p} - G\frac{m_S}{r} = \frac{1}{2}\left(v_0\frac{r}{r_p}\right)^2 - \frac{1}{2}{v_0}^2$$

$$G \cdot m_S\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2}{v_0}^2\left(\frac{r^2}{{r_p}^2} - 1\right)$$

$$G\cdot m_S\left(\frac{1}{r_p\cdot r}\right)=\frac{1}{2}{v_0}^2\left(\frac{r+r_p}{{r_p}^2}\right)$$

de (δ):

$$G\cdot m_S\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3}-1\right)v_J\right)^2\left(\frac{r+r_p}{r_p}\right)$$

de (α):

$$G\cdot m_S\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{\frac{G\cdot m_S}{r}}\right)^2\left(\frac{r+r_p}{r_p}\right)$$

$$G\cdot m_S\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2\frac{G\cdot m_S}{r}\left(\frac{r+r_p}{r_p}\right)$$

$$2r_p=\left(\sqrt{3}-1\right)^2\left(r+r_p\right)$$

$$r_p=\left(2-\sqrt{3}\right)\left(r+r_p\right)$$

$$r_p=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)r}{\sqrt{3}-1}$$

$$r_p=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\,r$$

H) El planeta Júpiter está ubicado a una distancia media $r = 5{,}20\,R_T$ del Sol, donde R_T es la distancia entre el Sol y la Tierra.
La mayoría de los cometas Jovianos tienen períodos de revolución entre 5,93 y 11,86 años, es decir, entre el período de revolución del planeta Júpiter y la mitad de él. ¿Es aceptable el modelo hipotético que se plantea en este problema para dar explicación a la formación de algunos cometas Jovianos?

Del ítem anterior,

$$r_p = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\,(5{,}20R_T) = 1{,}90\ R_T$$

Por lo tanto, el radio medio del cometa R_c será :

$$R_c = \frac{5{,}20R_T+1{,}90\ \ _T}{2} = 3{,}55R_T$$

Con este valor podemos determinar el periodo orbital del cometa a partir de la tercera ley de Kepler.

$$\left(\frac{T_c}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{R_c}{R_T}\right)^3$$

$$\left(\frac{T_c}{1\ año}\right)^2 = \left(\frac{3{,}55R_T}{R_T}\right)^3$$

$$T_c = 6{,}69\ años$$

Este periodo cae dentro del rango de los planetas Jovianos por lo tanto, es probable que algunos de estos cometas hayan ingresado a nuestro sistema de la forma descrita en este modelo.