1. CUERPO QUE SE DESLISA MIENTRAS CAE.

Se tiene un cuerpo que tiene la forma de 1/4 de cilindro macizo, de masa *m* y radio *R* (G es su centro de masas). Este es colocado sobre una superficie horizontal lisa en su posición de equilibrio inestable apoyado en el punto O como se muestra en la figura 1a y dejado en libertad de movimiento.

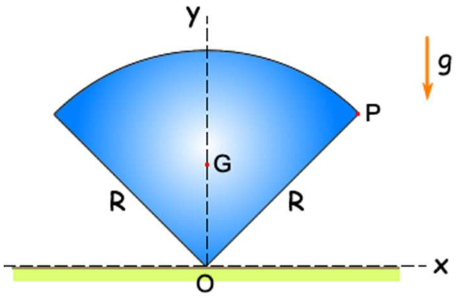


Fig 1a

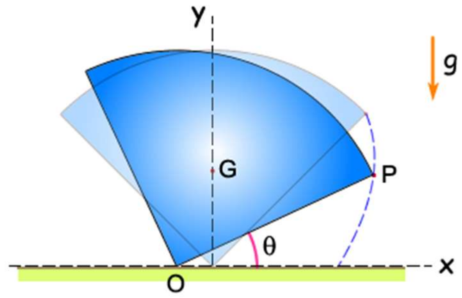


Fig 1b

Si este comienza a caer, como se indica en la figura 1b.

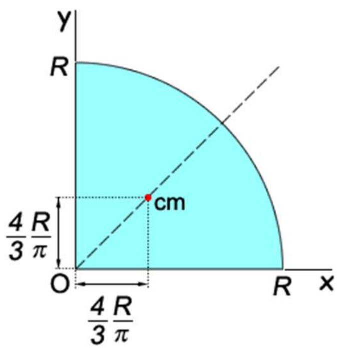
I. Determine en qué relación se encuentran las rapideces de los puntos O y G durante la caída del cuerpo, en función del ángulo θ que forma una de sus caras planas con la horizontal. (2,0 puntos)

II. Determine el momento de inercia del cuerpo respecto de un eje que es perpendicular al plano de la figura que pasa por el punto G. (2,0 puntos)

III. Determine la relación entre la rapidez v del centro de masas y la rapidez angular de rotación ω en el instante en que θ = 0. (1,0 puntos)

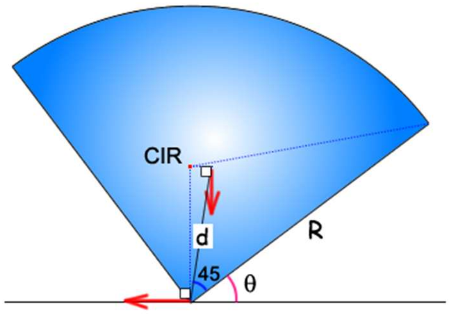
IV. Determine la rapidez angular del cuerpo en el instante en que θ = 0. (5,0 puntos)

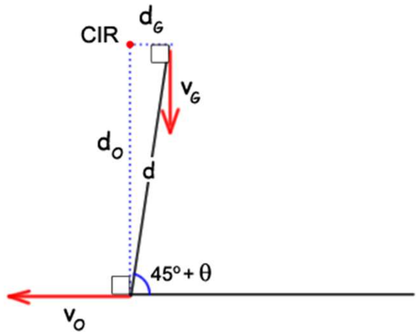
NOTA. El centro de masas cm de una placa delgada, uniforme y homogénea, que tiene la forma de ¼ de circulo, se encuentra ubicado en la posición que se muestra en la figura inferior.



Resolución

I. Para determinar la relación entre las rapideces de los puntos O, P y G usaremos el concepto de *centro instantáneo de rotación*. Para esto debemos tener en cuenta que la velocidad del punto G(v_G) siempre es vertical y la del punto O(V_O) siempre es horizontal.





El *centro instantáneo de rotación* (CIR) se encuentra en la intercepción de las rectas que son perpendiculares a las velocidades de dos o más puntos de un cuerpo rígido.
Se cumple que la magnitud de la velocidad de cada uno de estos puntos es proporcional a la distancia de este punto al CIR.
Según esto:

$$\frac{v_O}{d_O}=\frac{v_G}{d_G}$$

De la figura: $d_O = d\,sen(45^\circ+\theta) \quad \Rightarrow \quad d_O=(\frac{4R}{3\pi})(\cos\theta+sen\,\theta)\,;$

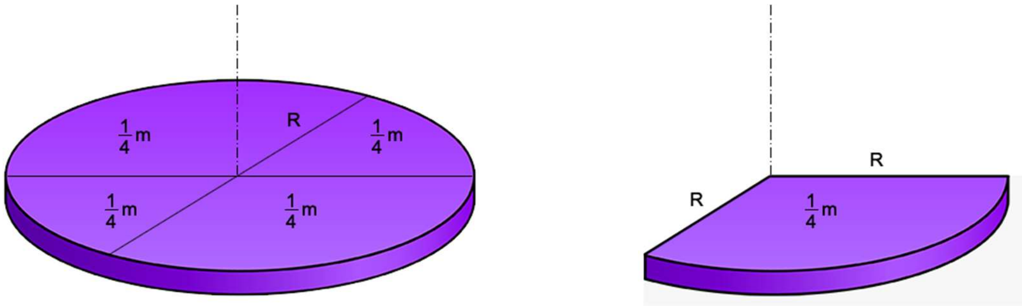
$$d_G = d\cos(45^\circ+\theta) \quad \Rightarrow \quad d_O=(\frac{4R}{3\pi})(\cos\theta-sen\,\theta)$$

Luego:

$$\frac{v_O}{(\frac{4R}{3\pi})(\cos\theta+sen\,\theta)}=\frac{v_G}{(\frac{4R}{3\pi})(\cos\theta-sen\,\theta)} \qquad \therefore \qquad \frac{v_O}{\cos\theta+sen\,\theta}=\frac{v_G}{\cos\theta-sen\,\theta}$$

II. El momento de inercia de un disco delgado respecto de un eje perpendicular a este que pasa por su centro geométrico es:

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$



Si este disco se divide 4 partes iguales, y debido a que el momento de inercia del disco completo es igual a la suma de los momentos de inercia de sus partes, se deduce que:

$$4I_{cuarto\,cilindro} = I_{cilindro} \quad \Rightarrow \quad 4I_{cuarto\,cilindro} = \frac{1}{2} mR^2 \quad \therefore \quad I_{cuarto\,cilindro} = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} m)R^2$$

Según esto, el momento de inercia de ¼ de cilindro respecto del mismo eje también es:

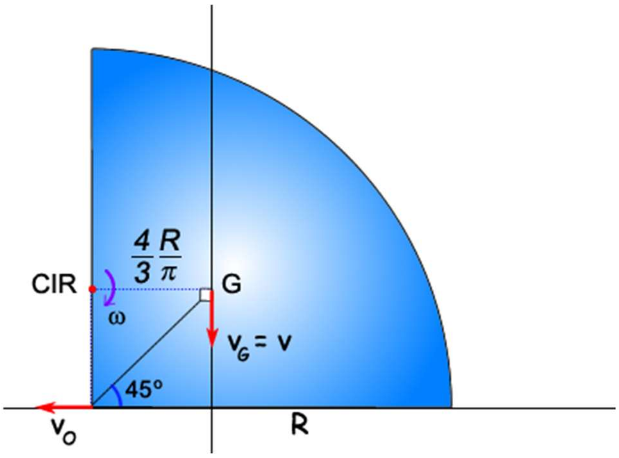
$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

Donde *m* es la masa del cuarto de cilindro.

A continuación, determinemos el momento de inercia respecto de un eje paralelo al anterior que pasa por el punto G aplicando el *teorema de ejes paralelos*.

$$I_O = I_G + md^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} mR^2 = I_G + m(\frac{4R}{3\pi}\sqrt{2})^2 \quad \therefore \quad I_G = \frac{1}{2} mR^2(1 - \frac{16}{9\pi^2})$$

III. Determinaremos la relación entre la rapidez lineal del CM y la rapidez angular de rotación cuando θ = 0 con el criterio del centro instantáneo de rotación.

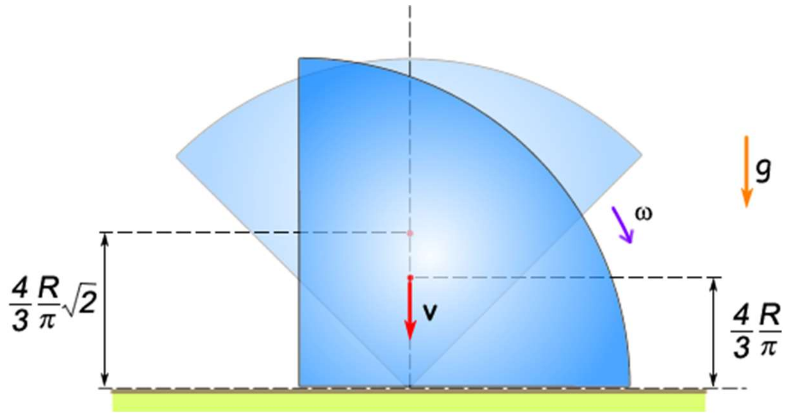


En el instante en que θ = 0, el movimiento del cuerpo es como si estuviera rotando alrededor del CIR.

Por tanto, se cumple que: $v = \omega d \quad \therefore \quad v = \omega(\frac{4R}{3\pi})$

IV. Para determinar la rapidez angular en ese instante, aplicaremos el *principio de conservación de la energía mecánica*.

$$EM_{inicio} = EM_{final} \quad \Rightarrow \quad (E_{PG})_{inicio} = (E_{K_{traslacional}} + E_{K_{rotacional}} + E_{PG})_{final}$$



$$mg(\frac{4R}{3\pi}\sqrt{2}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(\frac{4R}{3\pi})$$

Reemplazando la relación de la rapidez lineal obtenida anteriormente, y el momento de inercia del cuerpo respecto de su centro de masas.

$$mg(\frac{4R}{3\pi}\sqrt{2}) = \frac{1}{2}m\left[\omega(\frac{4R}{3\pi})\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}mR^2(1-\frac{16}{9\pi^2})\right]\omega^2 + mg(\frac{4R}{3\pi})$$

$$gR(\frac{4}{3\pi}\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\omega^2R^2(\frac{16}{9\pi^2}) + \frac{1}{4}\omega^2R^2(1-\frac{16}{9\pi^2}) + gR(\frac{4}{3\pi})$$

$$gR(\frac{4}{3\pi})(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{2}\omega^2R^2(\frac{16}{9\pi^2} + \frac{1}{2} - \frac{8}{9\pi^2})$$

$$gR(\frac{4}{3\pi})(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{2}\omega^2R^2(\frac{8}{9\pi^2} + \frac{1}{2})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\left[\frac{(\frac{8}{3\pi})(\sqrt{2}-1)}{(\frac{8}{9\pi^2} + \frac{1}{2})}\right]} \approx 0{,}772\sqrt{\frac{g}{R}}$$