Bloque de madera apoyada sin resbalar

Un bloque de madera, con forma semicilíndrica cuyo eje pasa por el punto O, compacto y homogéneo, de masa M y radio R, descansa apoyado sobre una pared vertical y sobre un piso horizontal formando un ángulo θ con la horizontal, tal como se observa en la figura 1a. La pared vertical y el piso horizontal tienen un coeficiente de fricción estática μ_1 y μ_2, respectivamente.

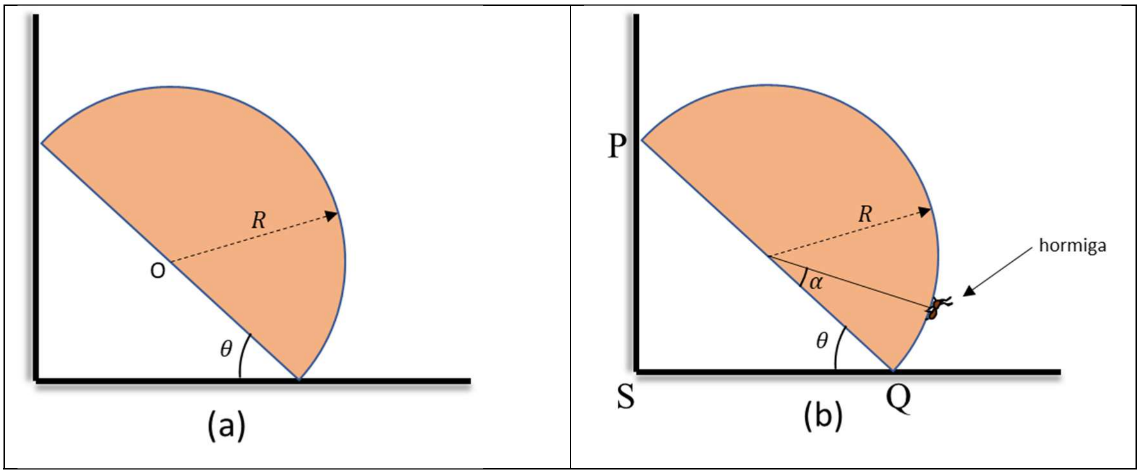


Figura 1.

a) Determine el rango de valores que puede tomar el ángulo θ de tal manera que el bloque de madera siempre se mantenga en equilibrio (reposo), apoyado sobre la pared vertical y el piso horizontal tal como se observa en la figura 1a. La respuesta expréselo de forma analítica en función de una o más de las variables dadas. [4]

b) Una hormiga de masa m ($m < M$) se ubica en una posición fija sobre la superficie del semicilindro, definida por el ángulo α, tal como se observa en la figura 1b. De todos los valores que puede tomar θ tal que el sistema bloque-hormiga siempre se mantenga en equilibrio (reposo), ¿cuál es su máximo valor? [3]

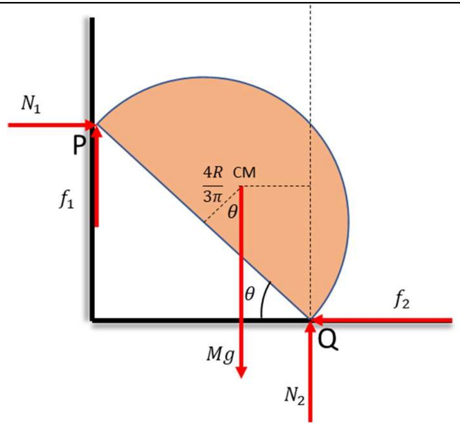
c) Ahora, considere que la hormiga empieza a subir lentamente, sin resbalar, sobre la superficie cilíndrica, desde el punto de contacto con el piso (Q) hasta el punto de contacto con la pared (P), siguiendo una trayectoria circunferencial que está contenida en un plano perpendicular al eje del semicilindro, tal como se ilustra en la figura 1b. ¿Cuál es el máximo valor del ángulo de inclinación, θ, tal que asegure el equilibrio del sistema para cualquier valor de α. Exprese su respuesta en términos de m/M. [3]

*en caso sea necesario utilice la siguiente identidad:
$A\sin\beta + B\cos\beta = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\beta+\phi)$, donde $\tan\phi = B/A$.

SOLUCIONARIO

a) Determine el rango de valores que puede tomar el ángulo θ de tal manera que el bloque de madera siempre se mantenga en equilibrio (reposo), apoyado sobre la pared vertical y el piso horizontal tal como se observa en la figura 1a. La respuesta expréselo de forma analítica en función de una o más de las variables dadas.

PRIMERA PARTE



* Aplicando la primera condición para el equilibrio mecánico.

$$N_1 = f_2 \qquad \text{(i)}$$
$$f_1 + N_2 = Mg \qquad \text{(ii)}$$

** Aplicando la segunda condición para el equilibrio mecánico en el punto Q.

$$f_1 2R\cos\theta + N_1 2R\sin\theta = Mg\left(R\cos\theta - \frac{4R}{3\pi}\sin\theta\right)$$

de esta ecuación despejamos f_1

$$f_1 = \frac{Mg\left(\cos\theta - \frac{4}{3\pi}\sin\theta\right) - 2N_1\sin\theta}{2\cos\theta} \qquad (iii)$$

*** se sabe que la fuerza de fricción estática cumple la siguiente condición $f_1 \leq u_1 N_1$, por tanto:

$$\frac{Mg\left(\cos\theta - \frac{4}{3\pi}\sin\theta\right) - 2N_1\sin\theta}{2\cos\theta} \leq u_1 N_1$$

De aquí despejamos N_1, el valor de la normal que ejerce la pared sobre el bloque.

	$N_1 \geq \dfrac{Mg(\cos\theta - \frac{4}{3\pi}\sin\theta)}{2(u_1\cos\theta + \sin\theta)}$	(iv)

**** por otro lado, también se cumple que $f_2 \leq u_2 N_2$ para el caso de la fricción con el piso horizontal. Utilizando (i), (ii) y (iii) se tiene:

$$f_2 \leq u_2 N_2$$

$$N_1 \leq u_2(Mg - f_1)$$

$$N_1 \leq u_2\left(Mg - \frac{Mg\left(\cos\theta - \frac{4}{3\pi}\sin\theta\right) - 2N_1\sin\theta}{2\cos\theta}\right)$$

De aquí despejamos nuevamente N_1

	$N_1 \leq \dfrac{u_2 Mg\left(\cos\theta + \frac{4}{3\pi}\sin\theta\right)}{2(\cos\theta - u_2\sin\theta)}$	(v)

Uniendo (iv) y (v) se tiene la siguiente inecuación

$$\frac{Mg(\cos\theta - \frac{4}{3\pi}\sin\theta)}{2(u_1\cos\theta + \sin\theta)} \leq N_1 \leq \frac{u_2 Mg\left(\cos\theta + \frac{4}{3\pi}\sin\theta\right)}{2(\cos\theta - u_2\sin\theta)}$$

Para que exista N_1 debe cumplirse que:

$$\frac{Mg(\cos\theta - \frac{4}{3\pi}\sin\theta)}{2(u_1\cos\theta + \sin\theta)} \leq \frac{u_2 Mg\left(\cos\theta + \frac{4}{3\pi}\sin\theta\right)}{2(\cos\theta - u_2\sin\theta)}$$

Haciendo un poco de álgebra, se obtiene una restricción para el ángulo θ,

$$\tan\theta \geq \frac{1 - u_1 u_2}{2u_2 + \frac{4}{3\pi}(1 + u_1 u_2)}$$

$$\theta \geq \theta_{min}$$

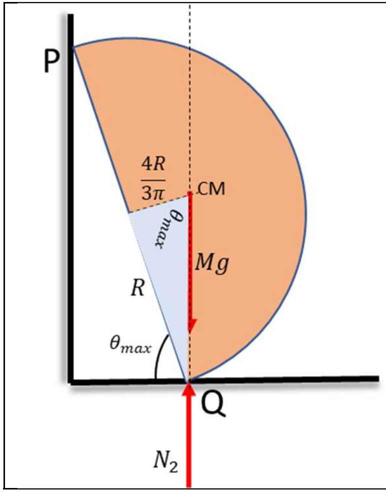
Donde,

$$\theta_{min} = \arctan\left(\frac{1 - u_1 u_2}{2u_2 + \frac{4}{3\pi}(1 + u_1 u_2)}\right)$$

a) SEGUNDA PARTE

El análisis anterior determina el ángulo mínimo por debajo del cual el bloque resbala sobre la pared. Sin embargo, también existe un ángulo máximo ya que debido a la geometría del bloque éste puede volcar.

<table>
<tr>
<td>



</td>
<td>

Aquí, para que el bloque esté a punto de volcar, el vector del peso y la normal deben ser colineales y pasar por el centro de gravedad del bloque. Así, por trigonometría,

$$\tan\theta_{max} = \frac{R}{\frac{4R}{3\pi}}$$

$$\theta_{max} = \arctan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

</td>
</tr>
</table>

UNIENDO LA PRIMERA Y SEGUNDA PARTE SE TIENE EL RANGO DE VALORES PARA EL ÁNGULO θ,

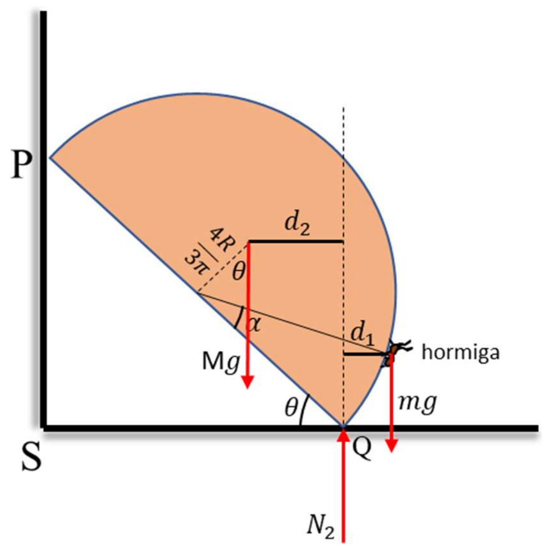
$$\theta_{min} \le \theta \le \theta_{max}$$

$$\arctan\left(\frac{1 - u_1 u_2}{2u_2 + \frac{4}{3\pi}(1 + u_1 u_2)}\right) \le \theta \le \arctan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

b) Una hormiga de masa m ($m < M$) se ubica en una posición fija sobre la superficie del semicilindro, definida por el ángulo α, tal como se observa en la figura 1b. De todos los valores que puede tomar θ tal que el sistema bloque-hormiga siempre se mantenga en equilibrio (reposo), ¿cuál es su máximo valor?

Solución

De todos los posibles valores que θ puede tomar, el máximo se alcanzará cuando la normal $N_1 = 0$, es decir, el semicilindro esté a punto de volcar hacia la derecha.



La posición de la hormiga sobre la superficie cilíndrica queda definida por el ángulo α. De acuerdo con el resultado del apartado (a), sabemos que θ será máximo ($\theta = \theta_{max}$) cuando la normal de la pared sea cero. En esta situación, el módulo del torque del peso tanto de la hormiga como del semicilindro serán iguales, porque están en equilibrio.

$$Mgd_2 = mgd_1 \qquad \text{(i)}$$

con ayuda del gráfico se puede deducir que:

$$d_2 = R\cos\theta_{max} - \frac{4R}{3\pi}\sin\theta_{max} \quad \text{(ii)}$$

y

$$d_1 = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\theta_{max}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - cos\theta_{max}\right) \qquad \text{(iii)}$$

Reemplazando (ii) y (iii) en (ii) , obtenemos:

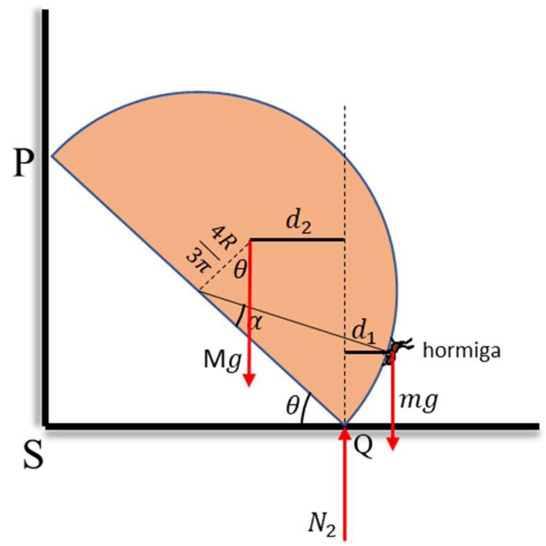
$$\theta_{max} = \arctan\left(\frac{1 + \frac{2m}{M}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\frac{m}{M}\sin\alpha + \frac{4}{3\pi}}\right)$$

c) Ahora, considere que la hormiga empieza a subir lentamente, sin resbalar, sobre la superficie cilíndrica, desde el punto de contacto con el piso (Q) hasta el punto de contacto con la pared (P), siguiendo una trayectoria circunferencial que está contenida en un plano perpendicular al eje del semicilindro, tal como se ilustra en la figura 1b. ¿Cuál es el máximo valor del ángulo de inclinación, θ, tal que asegure el equilibrio del sistema para cualquier valor de α. Exprese su respuesta en términos de m/M.

Solución

el máximo valor del ángulo θ se dará cuando la normal $N_1 = 0$, es decir, el semicilindro esté a punto de volcar hacia la derecha para cada posición de la hormiga.

d



La posición de la hormiga sobre la superficie cilíndrica puede quedar definida por el ángulo α. De acuerdo con el resultado del apartado (a), sabemos que θ será máximo cuando la normal de la pared sea cero. En esta situación, el módulo del torque del peso tanto de la hormiga como del semicilindro serán iguales, porque están en equilibrio.

$$Mgd_2 = mgd_1 \qquad \text{(i)}$$

de esta relación podemos deducir que d_1 es proporcional a d_2. Cuando $d_1 = 0$, entonces $d_2 = 0$. Si d_1 va aumentando, entonces d_2 también aumenta.

se puede deducir que

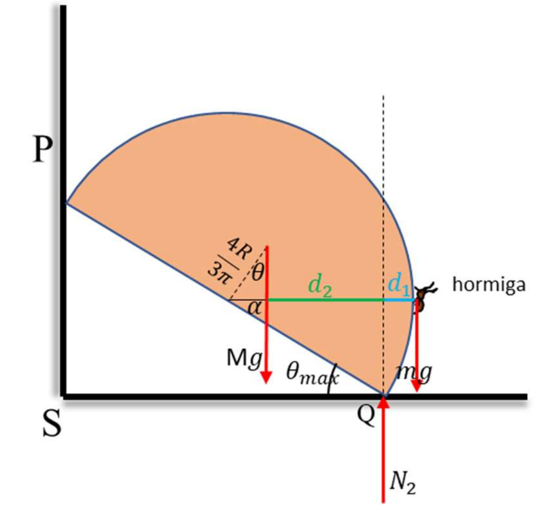
$$d_2 = R\cos\theta_{max} - \frac{4R}{3\pi}\sin\theta_{max} \qquad \text{(ii)}$$

la cual tiene la forma siguiente:

$$d_2 = A\cos(\theta_{max} + \phi) \qquad \text{(iii)}$$

a partir de aquí podemos inferir que cuando d_2 aumenta, el ángulo θ disminuye y viceversa.

Por consiguiente, a medida que la hormiga ascienda sobre la superficie (es decir, α va aumentando), la distancia d_1 también va aumentando, y, por ende, de acuerdo con (i), d_2 también se irá incrementando. Si d_2 se va incrementando, de acuerdo con (iii), el ángulo crítico máximo θ va disminuyendo. Ahora bien, aquí se debe tener en cuenta que d_1 no seguirá aumentando indefinidamente, sino, tiene un valor máximo.

 	para que d_1 se máxima, quiere decir que los segmentos cuyas longitudes son d_1 y d_2 estén en una misma recta (horizontal), lo cual implica que $\alpha = \theta_{max}$. O, en otras palabras, esta condición se da cuando d_1 está más alejado de la línea vertical que pasa por el punto Q. A partir de aquí se puede deducir por trigonometría que: $$d_1 = R - R\cos\theta_{max} \quad \text{(iv)}$$ Ahora reemplazamos (ii) y (iv) en (i)

$$Mg\left(R\cos\theta_{max} - \frac{4R}{3\pi}\sin\theta_{max}\right) = mg(R - R\cos\theta_{max})$$

De esta ecuación, despejamos θ_{max},

$$M\cos\theta_{max} - \frac{4M}{3\pi}\sin\theta_{max} = m - m\cos\theta_{max}$$

Dando forma adecuada para encontrar θ_{max},

$$\frac{m}{M} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\cos\theta_{max} - \frac{4}{3\pi}\sin\theta_{max}$$

Esta ecuación se puede resolver fácilmente utilizando la siguiente fórmula.

$$a\cos\theta_{max} - b\sin\theta_{max} = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(\phi - \theta_{max})$$

Donde $\tan\phi = \frac{a}{b}$.

FINALMENTE, el valor del máximo ángulo θ tal que el sistema bloque – hormiga no resbale para cualquier valor de α es:

$$\theta_{max} = \arctan\left(\frac{1 + \frac{m}{M}}{\frac{4}{3\pi}}\right) - \arcsin\left(\frac{\frac{m}{M}}{\sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2}}\right)$$