Problema 1.
Estudiando la mecánica de un trampolín (10 puntos)

Si nunca has saltado de un trampolín al menos has visto uno, una persona simplemente salta arriba y abajo en la superficie del trampolín. A pesar de su sencillo uso hay mucha física detrás de este efecto. Muchas personas creen que es la habilidad del material que te lanza al aire, en realidad es el sistemas de resortes que están añadidos al sistema del trampolín.

Cuando saltas en un trampolín, tu peso obliga a los resortes a estirarse. La energía cinética de los saltos es aplicada en los resortes, forzando al trampolín a reaccionar. Robert Hooke, físico del siglo 17 estudió la acción y reacción de las propiedades elásticas. En este ejercicio haremos uso de la conservación de las magnitudes mecánicas para estudiar el movimiento en un trampolín. Por simplicidad, nos restringimos a modelos sin pérdidas de energía, así como consideraremos que la masa del resorte y el material son despreciables.

Figura 1. Imagen de un trampolín.

Inicialmente, un líder de la V OCCAFI, con masa m_1, salta en un trampolín de manera periódica. La velocidad del delegado (hacia arriba al despegarse del trampolín) es v_0. Considere que la fuerza de contacto con el trampolín $F(t)$ durante el tiempo Δt tiene una forma triangular como se muestra en la figura 2.

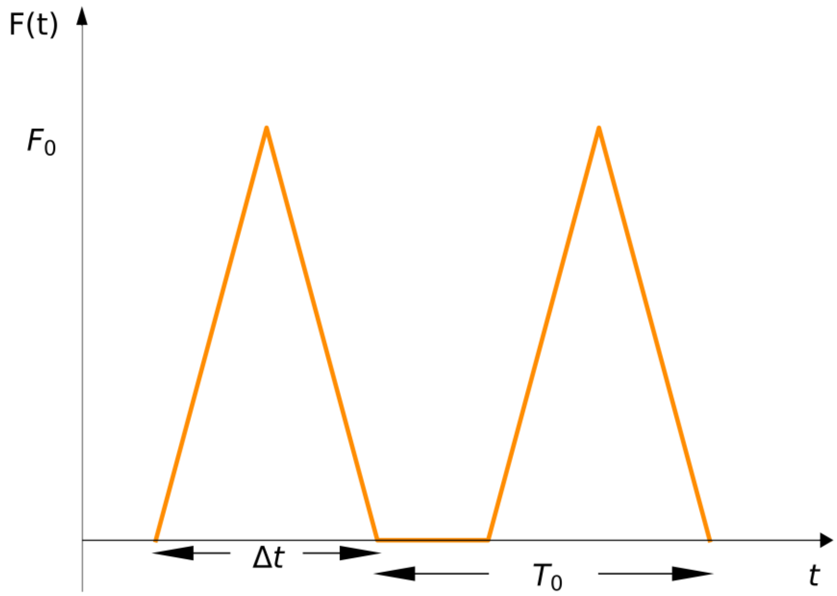


Figura 2. Evolución temporal de la fuerza de contacto $F(t)$, donde Δt es el tiempo de contacto y T_0 el periodo del salto.

A.	Encuentre el periodo T_0.	**1.0 pt**

B.	¿Cuál es la expresión de la fuerza máxima, F_0, sabiendo que el movimiento es periódico?	**1.0 pt**

Ahora el delegado, mientras salta hacia arriba con una velocidad v_0, toma a un estudiante de masa m_2 a una altura h_0, como se muestra en la figura 3. Asuma que el tiempo que tarda en tomar al estudiante es despreciable.

C.	Determine la velocidad del delegado inmediatamente antes e inmediatamente después de tomar al estudiante.	**2.0 pt**

D.	¿Cuál es la altura máxima, h_f, que el delegado y el estudiante alcanzan?	**2.0 pt**

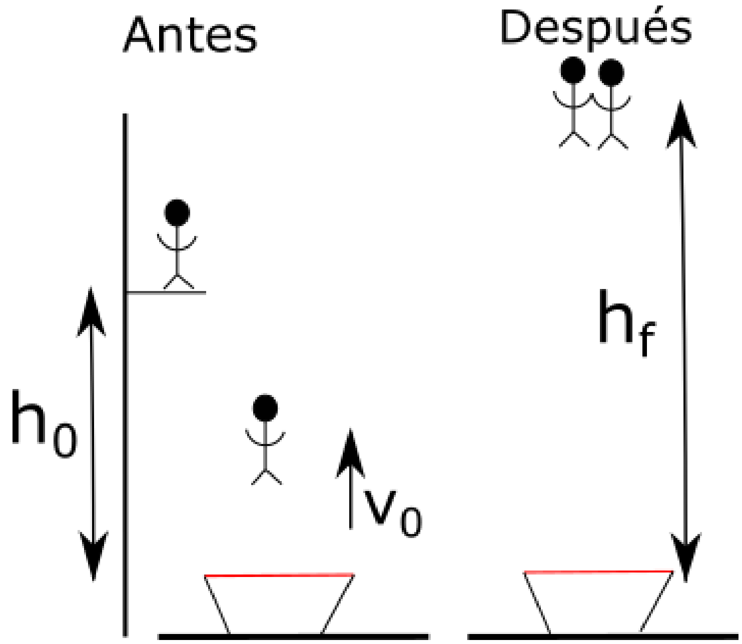


Figura 3. Se muestran las dos fases del salto, el delegado, con velocidad v_0, agarra al estudiante a una altura h_0.

E.	¿Qué altura máxima alcanzaría el delegado en el límite en que su masa es mucho más pesada que la masa del estudiante ($m_1 >> m_2$)?	**2.0 pt**

F.	Si el delegado no toma al estudiante, ¿qué altura máxima alcanzaría?	**1.0 pt**

G.	Compare (mayor, menor o igual) los resultados de los literales E) y F)	**1.0 pt**

SOLUCIÓN

A. El peso del delegado actúa durante todo el movimiento y durante el contacto con el trampolín debemos incluir la fuerza de contacto $F(t)$. Cuando el delegado está en el aire, la ecuación del movimiento es

$$\uparrow: m\ddot{y} = -mg$$

Al integrar esta ecuación (o simplemente recordar las ecuaciones de cinemática) entre los tiempos $t = t_0 = 0$ (fin del contacto) y $t = t_1$ (inicio de un nuevo contacto) escribimos:

$$mv_1 - mv_0 = -mgt_1$$

Donde $v_1 = v(t)$ y $v_0 = v(0)$. Dadas las condiciones del ejercicio y el movimiento vertical, la velocidad al final de la caída libre y al inicio del movimiento vertical debe de ser igual en magnitud $v_1 = -v_0$ (con diferente signo). Por lo tanto:

$$2v_0 = gt_1 \rightarrow t_1 = 2\frac{v_0}{g}$$

El periodo T_0 se expresa entonces como usando $\Delta t = t_2 - t_1$

$$T_0 = t_1 + \Delta t \rightarrow \boldsymbol{\frac{2v_0}{g} + \Delta t}$$

B. Aplicando la conservación del momento e impulso entre los tiempos t_0 y tiempo t_2

$$\uparrow: mv_2 - mv_0 = -mgT_0 + \frac{1}{2}F_0(t_2 - t_1)$$

Para que el movimiento sea periódico aplicamos la condición $v_2 = v_0$. Entonces:

$$-mgT_0 + \frac{1}{2}F_0\Delta t = 0 \rightarrow F_0 = \frac{2T_0}{\Delta t}mg = \boldsymbol{2\left(\frac{2v_0}{g\Delta t} + 1\right)mg}$$

C) y **D)** Se considera que el delegado al coger al estudiante existe una "colisión". Esta colisión es totalmente inelástica y los dos cuerpos permanecen juntos.

Podemos identificar 4 fases durante este problema. Necesitamos especificar la posición y la velocidad del delegado y el estudiante en cada una de estas fases. Esencialmente es un movimiento unidimensional, así que escogemos como el origen la posición de equilibrio del trampolín.

- **Fase 1:** El delegado se despega del trampolín con velocidad $\uparrow: v = v_0$ y posición inicial $y_d = 0$. El tiempo $t_1 = 0$. El estudiante esta en la posición $y_e = h_0$
- **Fase 2:** El delegado llega a la posición del estudiante $y_d = y_e = h_0$ con velocidad $\uparrow: v = v_{2,d}$ inmediatamente antes de coger al estudiante. El tiempo es t_2.
- **Fase 3:** La colisión dura un tiempo Δt_{col}. Durante este intervalo de tiempo el delegado agarra al estudiante y ambos salen con una velocidad $\uparrow$ $v_3 = v_{3,e+d}$. El tiempo es $t_3 = t2 + \Delta t_{col}$. Acá la clave está en considerar la colisión como instantánea $\Delta t_{col} \approx 0$.
- **Fase 4:** Ahora ambos (estudiante y delegado) alcanzan la altura final $y = h_f$ y por lo tanto la velocidad final es cero $v_{4,e+d} = 0$.

No existen fuerzas externas que realicen trabajo por lo tanto hay conservación de la energía mecánica entre las fases 1, 2, 3 y 4.

$1 \rightarrow 2$

Si la energía potencial inicial es cero $U(y = 0) = 0$. La energía mecánica de la fase 1 es:

$$E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + m_2 g h_0$$

La energía mecánica de la fase 2:

$$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2}m_1 v_2^2 + m_1 g h_0 + m_2 g h_0$$

Entonces

$$E_2 - E_1 = 0 = \frac{1}{2}m_1 v_2^2 + m_1 g h_0 - \frac{1}{2}m_1 v_0^2$$

Por lo tanto

$v_2 = (v_0^2 - 2gh_0)^{1/2}$ (la velocidad antes de la colisión)

$2 \rightarrow 3$

El momento en la fase 2 es debido al delegado

$$\vec{p_2} = m_1\vec{v_2} = m_1(v_0^2 - 2gh_0)^{1/2} \uparrow$$

El momento en la fase 3 será

$\vec{p_3} = (m_1 + m_2)v_3 \uparrow$

Conservación del momento

$m_1(v_0^2 - 2gh_0)^{1/2} = (m_1 + m_2)v_3$

C. $\boldsymbol{v_3 = \frac{m_1}{m_1+m_2}(v_0^2 - 2gh_0)^{1/2}}$ **(la velocidad después de la colisión)**

$3 \rightarrow 4$

La energía mecánica en la fase 3 es

$$E_3 = K_3 + U_3 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_3^2 + (m_1 + m_2)gh_0$$

La energía mecánica en la fase 4 es

$E_4 = U_4 = (m_1 + m_2)gh_f$

Por conservación

$$E_4 - E_3 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_3^2 + (m_1 + m_2)gh_0 - (m_1 + m_2)gh_f = 0$$

$$h_f = \frac{1}{2g} v_3^2 + h_0$$

D. Sustituyendo v_3 y encontrando **la altura final que alcanzan:**

$$h_f = \frac{1}{2g}\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}(v_0^2 - 2gh_0) + h_o = \boldsymbol{\frac{1}{2g}\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} v_0^2 + m_2(2m_1 + m_2)gh_0}$$

E. Si la masa del delegado es mucho más grande que la del estudiante $m_1 >> m_2$, la razón de las masas es

$$\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \approx 1$$

La altura final h_f es:

$$h_f = \frac{1}{2g}\frac{m_1^2}{(m_1 + m1)^2}(v_0^2 - 2gh_0) + h_0 \approx \boldsymbol{\frac{1}{2g}(v_0^2 - 2gh_0) + h_0} = \boldsymbol{\frac{1}{2g} v_0^2}$$

F. Si el delegado no coge al estudiante, entonces la energía mecánica no cambia entre $1 \rightarrow 4$ por lo que la conservación de energía nos da

$$E_4 - E_1 = m_1 g h_f - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = 0$$

$$\boldsymbol{h_f = \frac{1}{2g} v_0^2}$$

Esto concuerda con el límite de que la masa del delegado es mucho más grande que la masa del estudiante (como se demuestra en el literal E).

G. Las alturas son iguales.

Problema 2.
Barra moviéndose sobre un domo esférico (10 puntos)

La barra delgada uniforme de masa m y longitud L se encuentra inicialmente en reposo en posición horizontal centrada sobre la superficie de un domo esférico de radio $R = 0.6L$. Si en el extremo de la barra comienza a aplicarse una fuerza *P* perpendicular a la misma en todo momento y cuyo módulo va incrementándose lentamente, el deslizamiento se inicia para $\theta = 20.0°$.

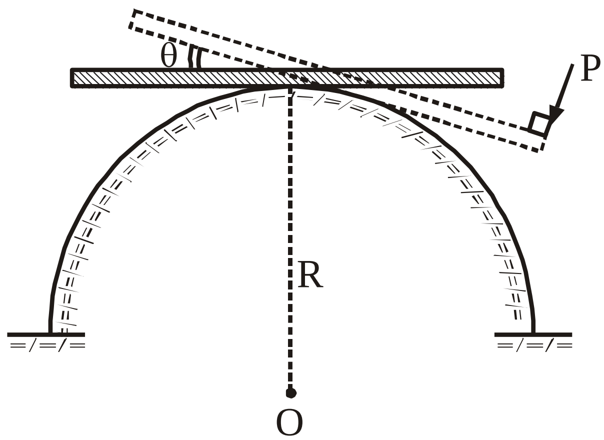


Figura 4.

A partir de lo enunciado y siendo g el módulo de la aceleración de la gravedad, realice las siguientes tareas:

A.	Realice un diagrama de cuerpo libre de la barra en la posición de deslizamiento inminente.	**1.0 pt**

B.	Determine el módulo de la fuerza de rozamiento que actúa sobre la barra de parte de la superficie del domo en la posición de deslizamiento inminente.	**2.0 pt**

C.	Determine el coeficiente de rozamiento estático μ_s entre la barra y la superficie del domo en términos del ángulo de 20.0° y el parámetro numérico $K = \left(1 - \frac{2}{15}\pi\right)$.	**2.0 pt**

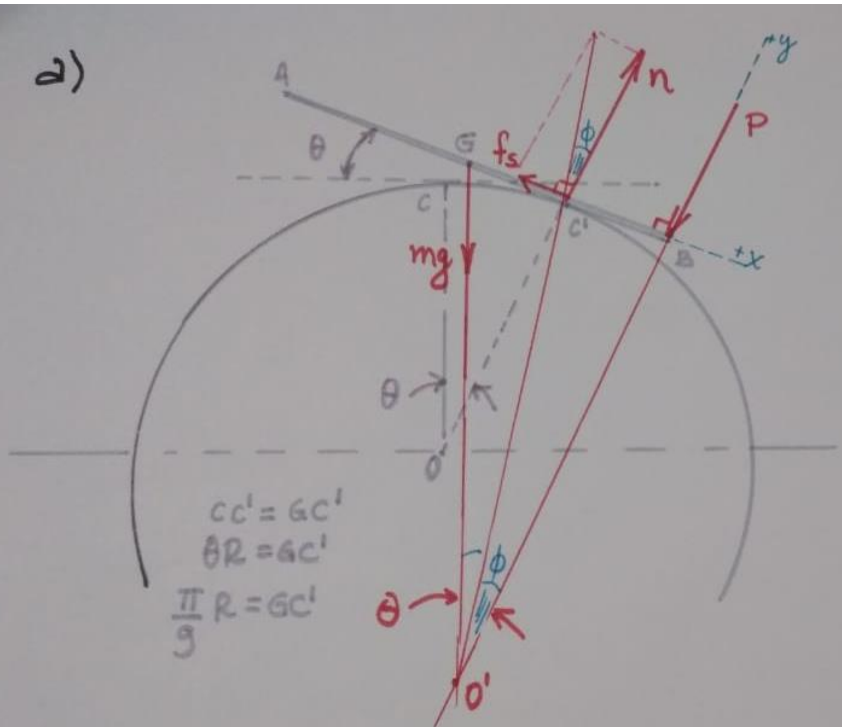
D.	Si la aceleración del centro de masas de la barra al momento de iniciar el deslizamiento es de módulo $a_{inicial}$, determine el coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre la barra y la superficie del domo en términos de $a_{inicial}$, g , K y del ángulo de 20.0°.	**2.0 pt**

E.	Considerando $a_{inicial} = 1.58\,\mathrm{m/s^2}$ y $g = 9.81\,m/s^2$, determine el valor numérico de los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la barra y la superficie del domo.	**1.0 pt**

F.	Determine el trabajo realizado por la fuerza P desde el momento en que la barra se encuentra en la posición horizontal hasta el instante en que está a punto de deslizar.	**2.0 pt**

SOLUCIÓN T-2

a)



b) $\sum \vec{F_x} = \vec{0}$

$+mg\,\text{Sen}\theta - f_s = 0$

$\boxed{f_s = mg\,\text{Sen}\theta} = mg\,\text{Sen}\,20°$

c) $f_s = f_{s\,máx} = \mu_s n$

$\mu_s = \frac{f_s}{n} = \tan\phi$

$\mu_s = \frac{C'B}{O'B} =$ ~~...~~

$\mu_s = \frac{GB - GC'}{O'B} = \frac{\frac{L}{2} - \frac{\pi}{9}R}{\frac{L}{2}\cot 20°}$

$\mu_s = \frac{\frac{L}{2} - \frac{\pi}{9}\cdot\frac{3}{5}L}{\frac{L}{2}} \cdot \tan 20°$

$\mu_s = \left(1 - \frac{2}{15}\pi\right)\tan 20°$

$\boxed{\mu_s = \varphi \tan 20°}$

D) De b) y c) $n = \frac{mg\,\text{Sen}\theta}{\mu_s}$

$a_{inicial} = \frac{\mu_s n - \mu_k n}{m} = g\frac{\text{Sen}\theta}{\mu_s}(\mu_s - \mu_k)$

$\mu_k = \mu_s\left(1 - \frac{a}{g\,\text{Sen}\theta}\right) = \boxed{\varphi \tan 20°\left(1 - \frac{a}{g\,\text{Sen}\,20°}\right)}$

E) $\mu_s = 0,212$

$\mu_k = 0,112$

Solución:

A. (Ver imagen adjunta)

B. De la condición de equilibrio, en el eje x

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0}$$

$$+mg\ sen\theta - f_s = 0$$

$$+mg\ sen\theta = f_s$$

$$f_s = +mg\ sen20°$$

C. Como para $\theta = 20°$ está a punto de resbalar

$$f_s = f_{smáx} = \mu_s n$$

$$\mu_s = \frac{f_s}{n} = tan\phi$$

$$\mu_s = \frac{C'B}{O'B} = \frac{GB - GC'}{O'B} = \frac{\frac{L}{2} - \frac{\pi}{9}R}{\frac{L}{2}\cot 20°}$$

$$\mu_s = \frac{\frac{L}{2} - \frac{\pi}{9}\frac{3}{5}L}{\frac{L}{2}} \tan 20°$$

$$\mu_s = \left(1 - \frac{2}{15}\pi\right) \tan 20°$$

$$\mu_s = K \tan 20°$$

D. De las relaciones encontradas en los ítems **B)** y **C)**

$$n = \frac{mg\ sen\ \theta}{\mu_s}$$

Por otro lado, al momento de resbalar la fuerza de fricción cambia a de su valor correspondiente del estático máximo al cinético. Por lo tanto, la fuerza resultante será la diferencia de estos valores.

$$a_{inicial} = \frac{\mu_s n - \mu_k n}{m} = \frac{g\ sen\ \theta}{\mu_s}(\mu_s - \mu_k)$$

$$\mu_k = \mu_s\left(1 - \frac{a_{inicial}}{g\ sen\ \theta}\right)$$

$$\mu_k = K \tan 20° \left(1 - \frac{a_{inicial}}{g\ sen\ 20°}\right)$$

E. Reemplazando datos.

$$\mu_s = 0{,}212$$

$$\mu_k = 0{,}112$$

F. Del gráfico podemos notar que la altura h que se eleva el centro de gravedad de la barra es $h = GC'Sen\ 20° - R(1 - \cos 20°)$

Puesto que se trata de un proceso cuasi estático

$$w_{neto} = 0$$

$$w_{peso} + w_P + w_{fuerza\ de\ rozamiento} + w_{normal} = 0$$

$$-mgh + w_P + 0 + 0 = 0$$

$$w_P = mgh$$

$$w_P = mg\big(GC'Sen\ 20° - R(1 - \cos 20°)\big)$$

$$w_P = 0{,}0591\ mg\ R$$

Problema 3.
Juego de trompos (10 puntos)

Uno de los juegos favoritos de los salvadoreños son las peleas de trompos. Un trompo es un trozo de madera que puede idealizarse a tener forma de un cono truncado, con altura H, radio superior R, radio inferior r, con masa M, alrededor del cual se enrolla desde su base un cordel de longitud L. Es de notar que en la punta del cono se coloca un clavo de masa y longitud despreciables, tal como se muestra en la Figura 1. Durante todo este problema no consideraremos los efectos de la gravedad sobre el trompo.

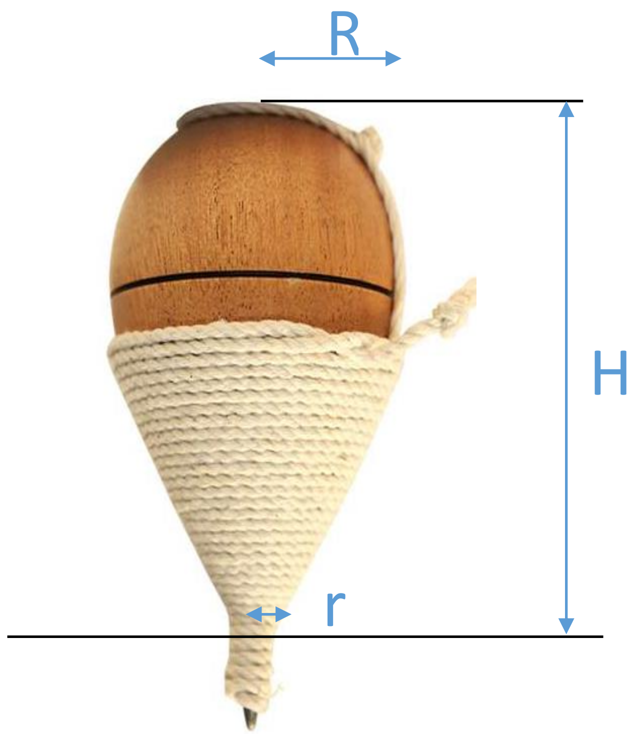


Figura 5: Diagrama esquemático de las dimensiones de un trompo mostrando un cordel de longitud L enrollado alrededor de su base.

El juego en sí mismo acoge variaciones regionales que dependen de la geografía y cultura de las poblaciones. Puede ir desde el juego más destructivo, donde se apunta a destrozar al trompo de los amigos, hasta las variaciones más pacíficas donde simplemente pierde aquel jugador cuyo trompo queda en reposo primero.

Parte A: Lanzamiento

El truco para poder lanzar un trompo apropiadamente es enrollarlo con la tensión apropiada para que las vueltas del cordel no se aflojen conforme se desenrolla (en cuyo caso el trompo gira sin deslizar sobre el cordel), amarrar el hilo a un dedo y arrojar el trompo de tal forma que su centro de masas adquiera cierta velocidad lineal inicial v_0 la cual podemos considerar es unidimensional, y paralela al suelo. El trompo avanzará al mismo tiempo que se desenrolla el cordel y esto le producirá una torca (torque) que aumentará su velocidad angular respecto a su eje de simetría. Al mismo tiempo, la fuerza producida por el cordel hará que su velocidad lineal disminuya.

A.1	Determine la rapidez angular final del trompo, ω_f, cuando el cordel se termina de desenrollar, para el caso que la velocidad lineal del centro de masa del trompo se hace cero.	**1.0 pt**

Una vez el trompo impacta contra el suelo, la fuerza de fricción entre la punta del trompo y el suelo irá reduciendo su velocidad angular hasta que eventualmente se detenga y el usuario tenga que volver a lanzarlo. Note que la velocidad lineal del centro de masas puede ser reducida a cero sin que el trompo se detenga, simplemente quedara girando en un punto fijo.

A.2	Suponga que la torca (torque) por fricción es constante e igual a τ_f. Con esta información, encuentre cuanto tiempo le tomará al trompo quedar en reposo.	**1.0 pt**

Parte B: Colisiones

El juego se vuelve interesante cuando tenemos dos o más jugadores. En la versión más pacífica, los jugadores tienen por objetivo lanzar sus trompos de tal forma que impacten contra los trompos oponentes; el ganador del encuentro es aquel cuyo trompo permanece girando por la mayor cantidad de tiempo.

En un encuentro de este tipo, el jugador A arroja su trompo con velocidad inicial v_A de tal forma que cuando el cordel se termina de desenrollar, el centro de masas del trompo A no tiene velocidad lineal (el trompo gira en un punto fijo). Un jugador B arroja su trompo, al mismo tiempo que el jugador A, con velocidad v_B necesaria para que quede en girando en un punto fijo pero que logre alcanzar al trompo A cuando ambos caen al suelo. Es de notar que las masas de los trompos son diferentes y en este caso $m_B > m_A$. Ambos trompos colisionan justo después de tocar el suelo en el tiempo $t_0 = 0$ por lo que podemos despreciar los efectos de la fricción antes de la colisión. Se considera que la interacción es instantánea y que el trabajo realizado por el rozamiento en ese intervalo de tiempo es despreciable.

B.1	Suponiendo que ambos trompos giren en la misma dirección, calcule la magnitud de la velocidad angular de cada trompo después de la colisión. Podemos suponer una colisión elástica.	**3.0 pt**

Considere un trompo A con masa $m_a = 250\ g$, radio $R = 5.0\ cm$, altura $H = 7.5\ cm$, el cual se enfrenta a un trompo B con masa $m_b = 500\ g$, radio $R = 5.0\ cm$, altura $H = 7.5\ cm$, que se lanzan hacia una superficie arenosa que ejerce una torca (torque) $\tau_f = 5.0 \times 10^{-3}\ N * m$, cuando fueron lanzados con velocidades $v_a = 11.5\ m/s$ y $v_b = 9.5\ m/s$.

B.2	Determine el tiempo que a los trompos mostrados les tomara para llegar al reposo después de colisionar. ¿Cuál de ellos será el ganador?	**2.0 pt**

B.3	Encuentre la velocidad mínima a la que el jugador del trompo A debe arrojar su trompo para que gane contra el trompo B asumiendo que el trompo B es lanzado siempre con una velocidad $v_b = 9.5\ m/s$.	**3.0 pt**

Datos Útiles:

- Momento de Inercia de un cono de altura H y radio R: $\frac{3}{10}MR^2$
- El centro de masas de un cono de altura H y radio R se encuentra a una altura $\frac{H}{4}$ medida sobre el eje del cono, a partir del centro de la base circular.
- Puede despreciar las masas de la punta y del domo del trompo, así como la cantidad de cuerda enrolladlas en ellos.

Solución:

A.1 Por conservación de Energía:

- Inicialmente: $\frac{1}{2}Mv_0^2$
- Cuando se termina de desenrollar: $\frac{1}{2}I\omega_f^2$

Por conservación de la energía:

$$\boldsymbol{\omega_f = v_0\sqrt{\frac{M}{I}}}$$

La fricción entre el cordel y el trompo sirve para convertir la energía línea en rotacional. No consideramos perdidas energéticas pues asumimos que el cordel se desenrolla sin deslizar.

A.2 Dado que conocemos la torca producida por fricción, podemos tener:

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$-\tau_f = I\alpha$$

$$\alpha = -\frac{\tau_f}{I}$$

Así que por cinemática básica:

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$0 = v_0\sqrt{\frac{M}{I}} - \frac{\tau_f}{I}\,t$$

$$\boldsymbol{t = \frac{v_0 I}{\tau}\sqrt{\frac{M}{I}}}$$

B.1 La velocidad angular con la que los trompos caen al suelo viene dada por:

$$\omega_A = v_A\sqrt{\frac{m_a}{I_a}}$$

$$\omega_B = v_B\sqrt{\frac{m_b}{I_b}}$$

En el momento en que chocan sus centros de masas no se mueven entre ellos por lo que la contribución lineal antes y después del choque es despreciable. Entonces, por conservación de energía:

$$E_0 = \frac{1}{2}I_a\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_b\omega_B^2 = \frac{1}{2}I_a\omega_{Ax}^2 + \frac{1}{2}I_b\omega_{Bx}^2$$

Por conservación de momento angular:

$$P_0 = I_a\omega_A + I_b\omega_B = I_a\omega_{Ax} + I_b\omega_{Bx}$$

Tenemos dos ecuaciones y dos variables, ω_{Ax} y ω_{Bx}.

Así que simultaneamos:

$$\omega_{Bx} = \frac{1}{I_b}\left(P_0 - I_a\omega_{Ax}\right)$$

Y tenemos:

$$E_0 = \frac{1}{2}I_a\omega_{Ax}^2 + \frac{1}{2}I_b\left(\frac{1}{I_b}\right)^2\left(P_0 - I_a\omega_{Ax}\right)^2$$

$$2E_0I_b = I_aI_b\omega_{Ax}^2 + P_0^2 - 2P_0I_a\omega_{Ax} + I_a^2\omega_{Ax}^2$$

$$2E_0I_b - P_0^2 = \left(I_aI_b + I_a^2\right)\omega_{Ax}^2 - 2P_0I_a\omega_{Ax}$$

Con soluciones:

$$\boldsymbol{\omega_{Ax}} = \frac{\boldsymbol{2P_0I_a \pm \sqrt{(2P_0I_a)^2 - 4\left(P_0^2 - 2E_0I_b\right)(I_aI_b + I_a^2)}}}{\boldsymbol{2(I_aI_b + I_a^2)}}$$

Solo tenemos que sustituir en la ecuación para ω_{Bx} y reemplazar valores.

B.2 Reemplazando en las formulas con los datos conocidos, tenemos:

$$m_a = 0.25\ kg$$

$$m_b = 0.5\ kg$$

$$R_a = 0.05\ m$$

$$R_b = 0.05\ m$$

$$V_a = 11.5\frac{m}{s}$$

$$V_b = 9.5\frac{m}{s}$$

Con esos datos calculamos los momentos de inercia:

$$I_a = 0.000188\ kg * m^2$$

$$I_b = 0.000375\ kg * m^2$$

Con ellos conocemos las velocidades angulares con las impactaran el suelo:

$$w_a = 419.9206\frac{rad}{s}$$

$$w_b = 346.891 \frac{rad}{s}$$

Y luego de la colisión, sus velocidades serán:

$$wax+ = 419.92 \frac{rad}{2}$$

$$wbx+= 346.890 \frac{rad}{s}$$

Donde vemos que sus velocidades no cambian, o bien:

$$wax- = 322.5477 \frac{rad}{s}$$

$$wbx- = 395.577 \frac{rad}{s}$$

De donde vemos que el trompo A quedara con una velocidad angular significativamente menor, por lo que se detendrá en el menos tiempo:

$$\boldsymbol{t_B = 26.0168\ s}$$

$$\boldsymbol{t_A = 15.7170\ s}$$

B.3 Para ello trabajamos al revés y fijamos la velocidad final del trompo $V_{Bx} = 0$, y despejamos para ω_B con lo que encontramos v_B.

Se encuentra que cuando $\boldsymbol{v_a = 19 \frac{m}{s}}$ les toma a los trompos exactamente igual a $26.0168214\ s$ detenerse. Cualquier velocidad mayor de ese valor resultara en el trompo A ganando sobre el trompo B.