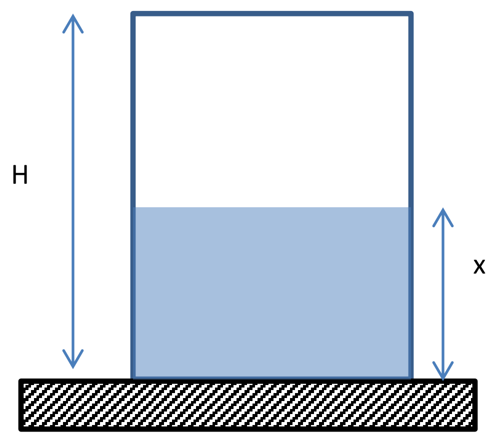
Todo o casi todo (más bien algo) sobre una vasija cilíndrica con líquido adentro.



A-Una vasija cilíndrica de altura H y masa M (la masa del fondo puede ser ignorada) es llenada con un líquido. La densidad lineal del líquido, esto es la razón de la altura del líquido a la altura de la columna es ρ.

A-1 ¿Cuál será la altura x de la columna a la cual el centro de masa del líquido más la vasija se encuentra en la posición más baja?

A-2 Evalué su resultado en los casos es que (1) el líquido que llena la vasija tiene la misma masa que la vasija, (2) la masa del líquido es muy pequeña en relación a la masa de la vasija, y (3) en el caso contrario.

A-3 Se abre instantáneamente un pequeño conducto en la pared de la vasija situado a la altura de su fondo por la que el líquido comienza a fluir. Pruebe que para cualquier porción de líquido que atraviese la abertura se cumple qué el trabajo por unidad de volumen realizado por la fuerza de gravedad es igual a la mitad de la densidad del líquido multiplicado por la diferencia de los cuadrados de la velocidad con que el líquido sale de la abertura y entra a ella desde la vasija.

A-4 La vasija se pone rotar con velocidad ω sin aceleración angular. ¿Qué forma adopta la superficie del líquido?

A-5 Use el resultado de A-3 para encontrar la aceleración resultante de una porción de agua al salir por el orificio. Describa aproximadamente la trayectoria que sigue el chorro de agua al caer.

Solución:

La altura del CM se obtiene de:

$$h_{cm} = \frac{M\frac{H}{2} + m\ \frac{x}{2}}{m + M}$$

Puesto que $m = \rho\ x$

Tenemos que:

$$h_{cm} = \frac{M\frac{H}{2} + \rho\ \frac{x^2}{2}}{M + \rho x}$$

Que conduce a la ecuación cuadrática:

$x^2 - 2\ h_{cm}x + \frac{M}{\rho}\ (H - 2h_{cm}) = 0$ [1]

Completando cuadrados:

$$(x - h_{cm})^2 + \frac{M}{\rho}\ (H - 2\ h_{cm}) + {h_{cm}}^2\ = 0$$

De donde se obtiene que el valor de la altura x es exactamente la del CM del sistema:

$$x = h_{cm}$$

Sustituyendo este valor de x en la expresión [1]:

$${h_{cm}}^2 - 2\ {h_{cm}}^2 + \frac{M}{\rho}\ (H - 2h_{cm}) = 0$$

De donde

$$h_{cm} = \sqrt{\left(\frac{M}{\rho}\right)^2 + \frac{M\ H}{\rho}} - \frac{M}{\rho}$$

A-2

1- Sea que el líquido que llena la vasija tiene la misma masa que la vasija:

$$\rho H = M$$

$$h_{cm} = \frac{M}{\rho}\left(\sqrt{2} - 1\right) \cong 0.41H$$

2- Si $\rho H \ll M$

$$h_{cm} = \frac{M}{\rho}\left(1 + \frac{\rho H}{M}\right)^{1/2} - 1$$

Y desarrollando el binomio para $\rho H \ll M$

Tenemos:

$$h_{cm} \approx \frac{H}{2}\left(1 - \frac{\rho H}{4\,M} + ..\right)$$

3- Si $\rho H \gg M$

$$h_{cm} = H\sqrt{\frac{M^2}{\rho^2 H^2} + \frac{M}{\rho H}} - \frac{M}{\rho} = H\left[\sqrt{\frac{M^2}{\rho^2 H^2} + \frac{M}{\rho H}} - \frac{M}{\rho H}\right]$$

Pero ya que :

$$\frac{M^2}{\rho^2 H^2} \ll \frac{M}{\rho H}$$

$$h_{cm} = H\sqrt{\frac{M}{\rho H}}$$

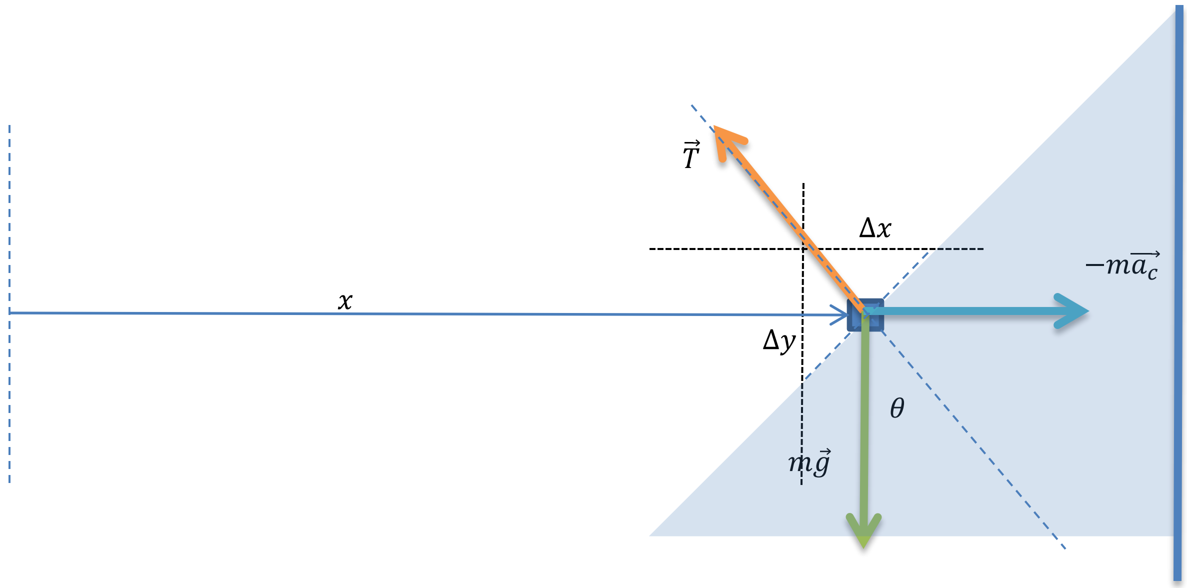
A-3

Separemos mentalmente la porción de volumen de agua que atraviesa la abertura en un instante. Esa porción de masa m , está siendo impulsada por la diferencia de presión dentro del recipiente (la manométrica dentro del recipiente y la presión atmosférica. Sea d el espesor de la abertura y S su área, el trabajo que extrae el agua del recipiente es:

$$W = F\,d = (P_o + \rho\,g\,h)\,Sd - P_o Sd = \tfrac{1}{2}m{v_2}^2 - \tfrac{1}{2}m{v_1}^2$$

Y puesto que $m = \rho\,V$, sustituyendo y dividiendo por el volumen de la porción de líquido analizada, tenemos el resultado buscado

A4- De la composición de fuerzas para un elemento de volumen a la distancia x del eje de rotación:



$$\text{Tan}\,\theta \; = \frac{a_c}{g} = \frac{w^2 x}{g} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

De aquí que:

$$y - y_o = \frac{\omega^2}{g}(x - x_o)x$$

Desarrollando el producto y completando cuadrados se llega:

$$y - y_o = \frac{\omega^2}{g}\left[\left(x - \frac{x_o}{2}\right)^2 + \frac{{x_o}^2}{2}\right]$$

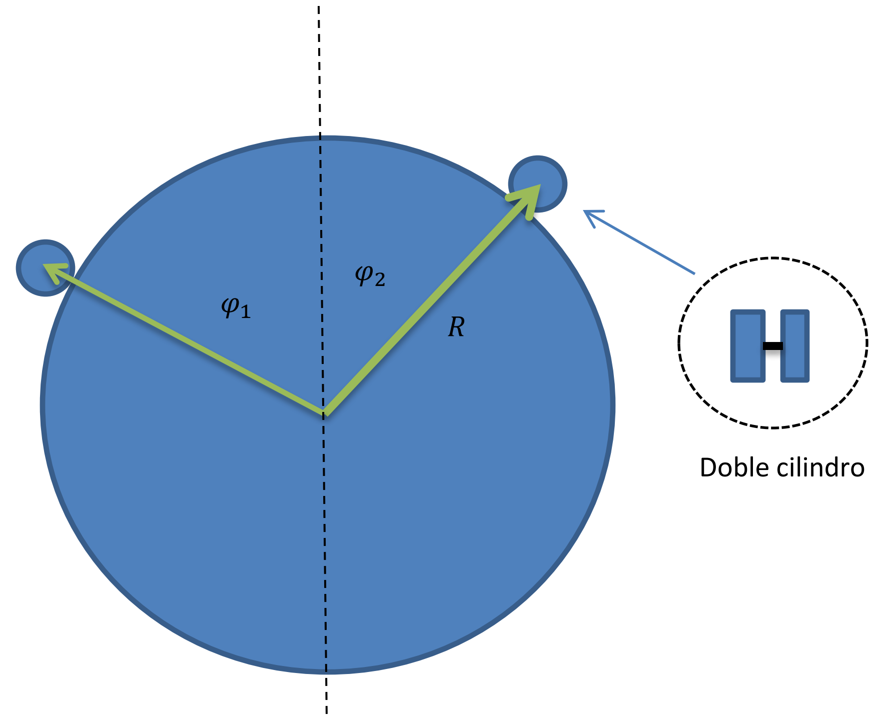
De donde:

$$y - y_o = \frac{\omega^2}{g}\left[x"^2 + \frac{{x_o}^2}{2}\right]$$

De donde y resulta ser una función del cuadrado de la posición del elemento de volumen, o sea la superficie es una parábola rotando.

A5- La composición de la aceleración de la gravedad, la centrípeta y la de Coriolis.

¿Para allá o para acá? Ó ¡Ni para allá, ni para acá!



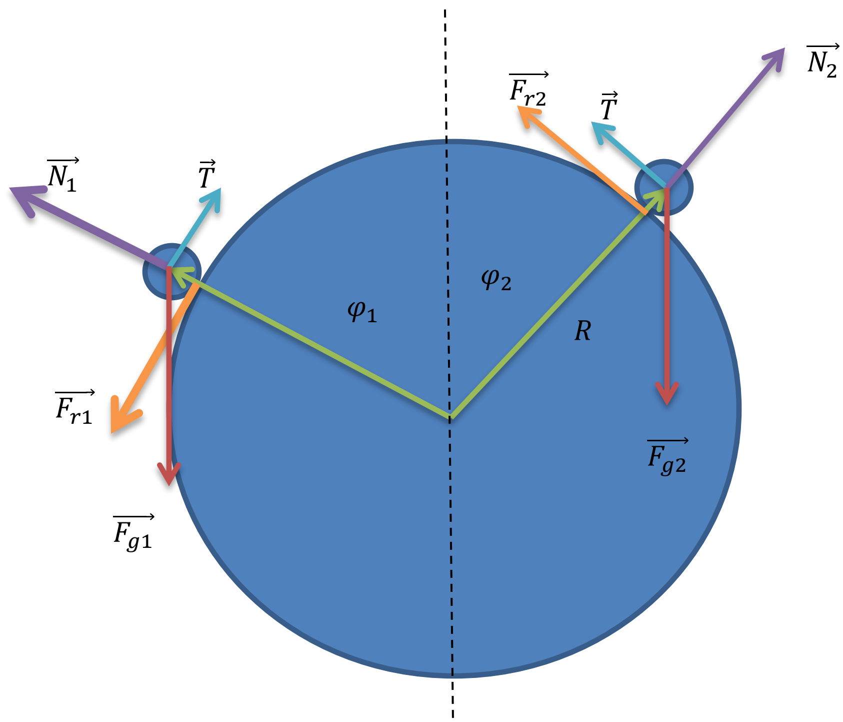
B- Dos cilindros pequeños de radio r están unidos por su eje, de forma que quedan separados entre ellos formando un doble cilindro. Una pareja de estos dos cilindros están apoyados sobre la superficie de otro cilindro de radio R mucho mayor que r, de forma que los tres ejes de los cilindros están todo el tiempo paralelos entre sí. El radio del cilindro grande es R= 10 cm. Los dobles cilindros están vinculados entre sí con un alambre rígido enganchado por sus extremos a sus ejes y que le permite girar libremente en anillas soldados a los extremos del alambre. La pieza que une los dos dobles cilindros de radio pequeño tiene forma de arco del mismo radio de curvatura del cilindro mayor y con una longitud de 20 cm. Así, los dobles cilindros de radio pequeño, apoyados sobre el cilindro mayor, pueden rodar a uno u otro lado. Los dobles cilindros ruedan todo el tiempo sin deslizar sobre el cilindro mayor.

Antes de que alguno de ellos se separe por cualquier motivo del cilindro mayor:

B-1 Obtenga una expresión para la aceleración instantánea con que podrían rodar los dobles cilindros sobre la superficie del cilindro mayor.

B-2 Obtenga la aceleración instantánea con que se mueve el conjunto a un lado u otro del cilindro mayor.

B-3 Evalué el resultado anterior en el caso en que la masa de uno de los cilindros es el doble de la otra y en qué posición sobre el cilindro quedaría en equilibrio.



B1- La ecuaciones de fuerzas sobre cada doble cilindro son:

$$T - m_1 g \sin \varphi_1 - F_{r1} = m_1 a_1$$

$$m_2 g \sin \varphi_2 - T - F_{r2} = m_2 a_2$$

$$N_1 - m_1 g \cos \varphi_1 = 0$$

$$N_2 - m_2 g \cos \varphi_2 = 0$$

Las ecuaciones de los torques de las fuerzas de rozamiento son:

$$r F_{r1} = I_1 \alpha_1$$

$$r F_{r2} = I_2 \alpha_2$$

En las condiciones de rodadura pura las aceleraciones de los CM de cada cilindro, y las aceleraciones tangenciales de los puntos sobre los que ruedan son las mismas, y simultaneando estas ecuaciones se obtiene:

$$a = \frac{2g(m_2 \sin \varphi_2 - m_1 \sin \varphi_1)}{3(m_1 + m_2)}$$

B2- Si $m_2 = 2m_1$

$$a = \frac{2}{9}\ g[2\ \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1]$$

Sea: $\Delta = m_2 \sin\varphi_2 - m_1 \sin\varphi_1$

Si $\Delta > 0\ gira\ \ a\ la\ derecha, si\ \Delta < 0\ gira\ \ a\ la\ derecha$

Supongamos:

$$m_2 \sin\varphi_2 = m_1 \sin\varphi_1$$

Entonces:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}$$

Pero puesto que $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{S}{R} = \frac{0.2}{0.1} = 2$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin(2-\varphi_2)}{\sin\varphi_2} = \sin 2\ ctg\ \varphi_2 - \cos 2$$

De donde:

$$\tan\varphi_2 = \frac{\sin 2}{\frac{m_2}{m_1} + \cos 2}$$

Y finalmente para las condiciones del problema:

$$m_2\ = 2\ m_1$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{\sin 2}{2 + \cos 2}$$

De donde $\varphi_2 = 0.52\ rad$ ó 29,87°